

I - A20

Spectral Element 法による積層板の解析

日本工営株式会社 正員 籠谷 統啓
 北海道大学 工学部 正員 三上 隆
 釧路工業高等専門学校 正員 芳村 仁
 北海道大学 工学部 正員 荻澤 憲吉

1. はじめに

一般に有限要素法の解は、要素の分割数を増やしても、変位関数の多項式の次数を増やしても収束する。本研究では、後者の収束性を利用した、Spectral Element 法による積層板の解析を試み、その適用可能性の検討を行う。

2. 解析方法

2.1. Reissner-Mindlin の平板理論

板厚方向のせん断変形を考慮した、Reissner-Mindlin の平板理論を拡張した1次せん断変形理論に基づき、歪み-変位の関係式は次式のように表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (1)$$

ここで、 u_0, v_0, w は中央面の変位であり、 ϕ_x, ϕ_y は x-z 平面, y-z 平面における回転角を表す。

2.2. 積層板の剛性

一般的な合応力成分と歪み成分、曲率成分との関係は次式のように表せる。

$$\begin{Bmatrix} N' \\ M' \\ Q' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A' & B' & 0 \\ B' & D' & 0 \\ 0 & 0 & A'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\{N'\} = \{N_x \ N_{xy} \ N_{yx} \ N_y\}^T, \quad \{M'\} = \{M_x \ M_{xy} \ M_{yx} \ M_y\}^T, \quad \{Q'\} = \{Q_x \ Q_y \ Q_x \ Q_y\}^T$$

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial v_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\}^T, \quad \{\kappa\} = \left\{ \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \frac{\partial \phi_x}{\partial y}, \frac{\partial \phi_y}{\partial x}, \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right\}^T, \quad \{\phi\} = \left\{ \phi_x, \phi_y, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T$$

剛性 $[A'], [B'], [D'], [A'']$ の成分は弾性係数, ポアソン比, 積層状態を与えることによって決定する。

2.3. 形状関数

変位 d は節点変位 d_j によって局所座標系で次式のように仮定する。

$$d(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \ell_i(\xi) \ell_j(\eta) d_{ij}, \quad \{d\} = \{u_0 \ v_0 \ \phi_x \ \phi_y \ w\}^T, \quad \{d_{ij}\} = \{u_{0ij} \ v_{0ij} \ \phi_{xij} \ \phi_{yij} \ w_{ij}\}^T \quad (3)$$

$\ell_i(\xi), \ell_j(\eta)$ は Lobatto の数値積分点における Lagrange 補間で次式のように表せる。

$$\ell_i(\xi) = \prod_{j=0, j \neq i}^{N_x} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}, \quad \ell_j(\eta) = \prod_{i=0, i \neq j}^{N_y} \frac{(\eta - \eta_i)}{(\eta_j - \eta_i)}$$

2.4. 剛性マトリックス

それぞれの剛性に対する剛性マトリックスは次式のように表せる。

$$[K_1] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_1]^T [A'] [B_1] \det J |d\xi d\eta, \quad [K_3] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_1]^T [D'] [B_1] \det J |d\xi d\eta, \quad (4)$$

$$[K_2] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_1]^T [B'] [B_1] \det J |d\xi d\eta, \quad [K_4] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_2]^T [A''] [B_2] \det J |d\xi d\eta$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} [J]^{-1} [\Psi] & 0 \\ 0 & [J]^{-1} [\Psi] \end{bmatrix}, \quad [B_2] = \begin{bmatrix} \ell_0 \times \ell_0 \cdots \ell_{N_x} \times \ell_{N_y} & 0 & 0 \\ 0 & \ell_0 \times \ell_0 \cdots \ell_{N_x} \times \ell_{N_y} & 0 \\ 0 & 0 & [J]^{-1} [\Psi] \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \frac{\partial \ell_i(\xi)}{\partial \xi} \ell_j(\eta) x_i & \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \frac{\partial \ell_i(\xi)}{\partial \xi} \ell_j(\eta) y_i \\ \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \frac{\partial \ell_i(\eta)}{\partial \eta} \ell_j(\xi) x_i & \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \frac{\partial \ell_i(\eta)}{\partial \eta} \ell_j(\xi) y_i \end{bmatrix}, \quad [\Psi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell_0(\xi)}{\partial \xi} \ell_0(\eta) \cdots \frac{\partial \ell_{N_x}(\xi)}{\partial \xi} \ell_{N_y}(\eta) \\ \frac{\partial \ell_0(\eta)}{\partial \eta} \ell_0(\xi) \cdots \frac{\partial \ell_{N_y}(\eta)}{\partial \eta} \ell_{N_x}(\xi) \end{bmatrix}$$

Keyword Spectral Element 法, 積層板, 静的問題, 自由振動

札幌市 北区 北13条 西8丁目 北海道大学 工学部 TEL 011-716-2111

全体の剛性マトリックス $[K]$ は、この4つの剛性マトリックスを組み合わせることにより得られ、積分は Lobatto の求積法を用いる。

3. 計算例

等分布荷重、単純支持における、辺長 L 、板厚 h の正方形の積層板（4層の逆対称アングラプライ積層 積層角 $\theta = 45^\circ$ $E_1/E_2 = 40$, $G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6$, $G_{23}/E_2 = 0.5$, $\nu_{12} = 0.25$ ）について次の2つの方法で解析する。

(1) Spectral Element 法により、補間多項式の次数 N を変えて計算。

(2) 9節点アイソパラメトリック要素法により、要素の分割数 $n \times n$ を変えて計算。

板厚比 L/h を変化させたときの無次元変位 $W (= w_0 E_2 h^3 / q_0 L^4 \times 10^3)$ を図-1に、板厚比 $L/h = 10$ 、 $L/h = 10^3$ の時の W 、無次元曲げモーメント $M_x (= m_x / q_0 L^2 \times 10^2)$ を表-1、表-2に、また板厚比 $L/h = 10$ の時の無次元固有円振動数 $\Omega (= \omega L^3 / h \sqrt{\rho/E_2})$ を表-3に厳密解と共に示す。

4. まとめ

研究では変位、曲げモーメントともに板厚比 $L/h = 10^5$ の薄板まで計算したが、shear locking の影響を全く受けないことが分かる。Spectral Element 法は要素の分割数を全く変えないで、変位関数の多項式の次数を上げるだけでかなり精度の高い解を得ることができる。また総節点数が等しい9節点アイソパラメトリック要素の結果と比べると変位、曲げモーメント、固有円振動数ともに精度が高く、Spectral Element 法の解の収束が速いことが分かる。

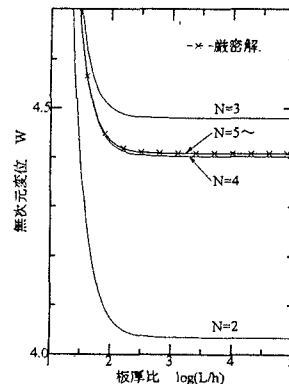


図-1 板厚比を変化させたときの変位

表-1 変位、曲げモーメントの比較 ($L/h = 10$)

	総節点数	36	100	196	324	厳密解
スペクトル要素	次数	2	4	6	8	—
	変位	6.9132	6.9163	6.9173	6.9173	6.9173
	モーメント	3.9884	3.5371	3.5235	3.5247	3.5247
9節点要素	分割数	1×1	2×2	3×3	4×4	—
	変位	6.9132	6.9206	6.9180	6.9175	6.9173
	モーメント	3.9884	3.5723	3.5324	3.5257	3.5247

表-2 変位、曲げモーメントの比較 ($L/h = 10^3$)

	総節点数	36	100	196	324	厳密解
スペクトル要素	次数	2	4	6	8	—
	変位	4.0359	4.4030	4.4089	4.4089	4.4089
	モーメント	3.0177	3.3360	3.5941	3.6019	3.6019
9節点要素	分割数	1×1	2×2	3×3	4×4	—
	変位	4.0359	4.3764	4.3953	4.4014	4.4089
	モーメント	3.0177	3.6219	3.6082	3.6047	3.6019

表-3 固有円振動数の比較

	総節点数	次数	分割数	no.1	no.2	no.3	no.4	no.5
スペクトル要素	49	6	—	18.46	34.89	50.54	—	—
9節点要素	49	—	3×3	18.49	35.17	50.30	—	—
スペクトル要素	81	8	—	18.46	34.87	50.52	54.27	67.16
9節点要素	81	—	4×4	18.47	35.00	50.48	54.60	67.01
スペクトル要素	121	10	—	18.46	34.87	50.52	54.27	67.17
9節点要素	121	—	5×5	18.47	34.93	50.51	54.50	67.18
厳密解	—	—	—	18.46	34.87	50.52	54.27	67.17

参考文献

- 1) Uzi Zrahia and Pinahas Bar-Yoseph : Plate Spectral Elements based upon Reissner-Mindlin Theory International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.38, pp.1341-1360, 1995
- 2) 熊谷清貴・三上隆・芳村仁：衝撃荷重を受ける積層板の解析 土木学会北海道支部論文報告集，第52号，1-53，pp.244-247，1996