Ⅰ－A18　　エネルギー原理に基づくトラス構造物の複合非線形解析法に関する一考察

愛媛大学工学部　フェロー　大久保　禎二

積水ハウス(株)　正　上野　浩司

愛媛大学大学院　学　鈞　哲之

愛媛大学大学院　学　川下　誠二

１．まえがき

本研究は、これまで著者の一人によって研究開発されてきたトラス構造物の最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく材料非線形解析法をさらに発展させ、材料の応力度－ひずみ関係の非線形性のみならず、構造物の幾何学的な非線形性をも考慮できる複合非線形解析法を確立するために検討を行った結果について述べるものである。

２．エネルギー原理に基づくトラス構造物の複合非線形解析法

一般的に先行荷重$P_{r-1}=\sum_{i=1}^{r-1}\overline{P}_i$につづいて増分荷重$\overline{P}_r$が載荷した場合の、$\overline{P}_r$による複合非線形解析法について考える。参考文献１より、先行荷重$\sum_{i=1}^{r-1}\overline{P}_i$につづいて載荷される増分荷重$\overline{P}_r$による材料の非線形性のみを考慮したトラス構造物の各部材に作用する軸力$\overline{N}_r$および各自由節点の変位$\overline{\lambda}_r$を求めるために用いられる部材iのコンプリメンタリーエネルギー$\overline{\Pi}_{Ci}(\overline{N}_{ri})$は、図-1に示す各部材の応力度－ひずみ曲線において、先行荷重$P_{r-1}=\sum_{i=1}^{r-1}\overline{P}_i$により生じている応力度$\sigma_{P_{r-1},i}$およびひずみ$\varepsilon_{P_{r-1},i}$の点$O'$を新たな原点として、増分荷重$\overline{P}_r$のみを考慮して力の釣合方程式のもとで構造物の全コンプリメンタリーエネルギー$\overline{\Pi}_C(\overline{N}_r)$を最小化することにより正確に求められることが明らかとなっている。すなわち、n部材を有するトラス構造物の増分荷重$\overline{P}_r$による増分軸力$\overline{N}_r$を求めるための全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は、各部材の増分軸力$\overline{N}_r$を未知変数として次のように定式化することができる。

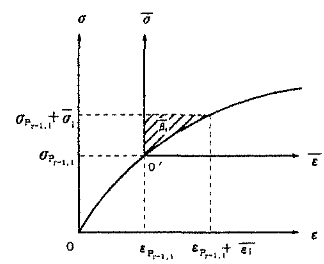
find　$\overline{N}_r$,　which

minimize　$\overline{\Pi}_C(\overline{N}_r)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\Pi}_{Ci}(\overline{N}_{ri})$　(1)

subject to　$g(\overline{N}_r)=\overline{P}_r-\overline{C}_r\overline{N}_r=0$　(2)

ここに、$g(\overline{N}_r)=[g_1(\overline{N}_r),\cdots,g_m(\overline{N}_r)]^T$は各可動節点における力の釣合方程式、$\overline{P}_r=[\overline{P}_{1r},\cdots,\overline{P}_{mr}]^T$は各可動節点に作用する外力、$\overline{C}_r(m\times n)$は$\overline{N}_r$の$\overline{P}_r$方向への変換マトリックス、$m$は可動節点の自由度である。

図-1　増分荷重に対するコンプリメンタリーエネルギー密度



ところで、トラス構造物の節点変位の変化量の影響をも考慮して複合非線形解析を行う場合には、増分荷重$\overline{P}_r$による各可動節点変位も考慮して各自由節点における力の釣合方程式を求めなければならない。このためには、まず先行荷重により生じている節点変位λ_{r-1}を考慮して各節点の座標および部材の方向余弦マトリックスC_{r-1}を求め、$\overline{P}_r$により生ずる各節点の変位$\overline{\lambda}_r$を求める。つづいて、この節点変位$\overline{\lambda}_r$をも先行荷重による各節点変位λ_{r-1}に加え、再度C_{r-1}を修正する。さらに質量保存則$\rho_0A_0l_0=\rho Al$により各部材の断面積Aおよび部材長lも修正する。このようなトラスの形状および各部材の方向余弦、断面積、部材長の修正を$\overline{\lambda}_r$および$\overline{N}_r$が一定値に収束するまでくり返すことにより、材料の非線形性のみならず幾何形状の非線形性をも考慮したトラス構造物の増分荷重$\overline{P}_r$による増分部材力$\overline{N}_r$および増分節点変位$\overline{\lambda}_r$を決定することができる。

キーワード：トラス、材料非線形、幾何学的非線形、エネルギー原理

連絡先：〒790-77 松山市文京町３　愛媛大学工学部環境建設工学科　TEL：089-927-9812, FAX：089-927-9844

なお本研究では、上記の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題(1)(2)を解くために、目的関数を二次形式に、また制約条件を一次形式に近似し近似二次計画問題を導入し、これを勾配射影法の手法を用いて解き $\overline{N}_r$ の改良解 $\overline{N}_r+\Delta\overline{N}_r$ を求めている。次に目的関数の二次の項の係数行列を BFGS 公式を用いて修正し、改良解 $\overline{N}_r+\Delta\overline{N}_r$ に対する新たな近似二次計画問題を作成する。このようにして逐次、近似二次計画問題を修正しながらＳＱＰの手法を用いて解の改良を繰り返すことにより真の部材力 N^* を決定することができる。

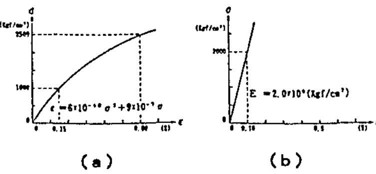


図-2 解析に用いた材料の応力度－ひずみ関係

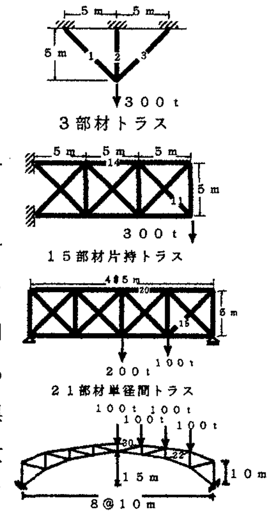


図-3 解析モデル

３．解析例および考察

図-2（ａ）に示す応力－ひずみ関係を有する非線形材料を用いて、図-3 に示す3,15,21,33 部材を有するトラス構造物について、荷重の分割数を1,2,…,9,10と変化させ、分割数が解の精度に及ぼす影響について考察を行った。その結果、3,15,21 部材トラスにおいては幾何学的形状の変化を考慮する場合、荷重の分割数を1,2,…,9,10と多くするにしたがい解は一定値に収束して行くが、分割数 1 と分割数 10 の解の相対誤差は0.0%～3.7%程度であり分割数が解の精度に与える影響は極めてわずかであった。しかし 33 部材を有するアーチトラスでは分割数 1 と分割数 10 の解の相対誤差は 2.4%～13.5%程度と大きくなっており、トラスの構造形式により荷重の分割数が解に及ぼす影響が大きく変化することが認められる。つぎに、本研究で提案している解析法の信頼性および有効性を検討するため、図-2（ｂ）に示すの応力度－ひずみ関係を有する線形材料よりなる33部材アーチトラスについて、本解析法による解と変位法による解との比較を行った。その結果を表-1 に示す。表-1 より明らかなように、幾何学的非線形性を考慮した場合、本研究の解析法により得られた解と変位法により得られた解とは部材の応力度において 0.1%～3.8%程度の相対誤差で、また最大変位において 4.4%の誤差でほぼ完全に一致しており、本研究で提案している解析法により正確な解が得られることが明らかとなった。

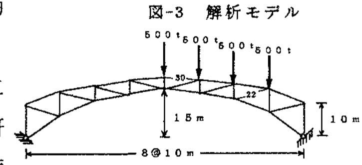


図-4 ３３部材アーチトラス

表-1 幾何学的形状の変化を考慮した場合と考慮しない場合の解と変位法による解との比較
（３３部材アーチトラス，断面積 A =200cm²）（材料図-2 (b)）

幾何学的形状の変化	考慮する場合	考慮しない場合	変位法 1)		
荷重分割数	1	1	1	相対誤差 A 2) (%)	相対誤差 B 3) (%)
応力度 (kgf / cm²)					
σ_1	9430.19	9049.74	9500.43	0.739	4.744
σ_2	13045.46	12149.50	13203.87	1.200	7.985
σ_3	14158.97	12891.98	14413.82	1.768	10.558
σ_4	9624.51	8838.25	9910.31	2.884	10.818
σ_6	5213.93	3724.10	5021.72	3.828	25.840
σ_7	5195.02	5418.05	5278.15	1.575	2.651
σ_9	2937.73	2528.33	2965.30	0.930	14.736
σ_{10}	4993.53	4297.33	5060.26	1.319	15.077
σ_{12}	1962.43	1388.05	2044.20	*	*
σ_{16}	11623.11	9512.52	11556.95	0.572	17.690
σ_{21}	5668.13	4985.73	5600.73	1.203	10.981
σ_{23}	4253.64	4048.34	4249.28	0.103	4.729
σ_{24}	2315.31	2076.45	2272.08	1.903	8.610
σ_{26}	5277.96	4538.48	5320.94	0.808	14.705
σ_{27}	6936.29	5685.38	7044.07	1.530	19.288
σ_{29}	2466.88	1736.35	2669.72	*	*
σ_{30}	8851.15	7609.56	8664.30	2.157	12.773
σ_{31}	12448.51	10826.00	12365.05	0.675	12.447
σ_{32}	7977.21	7062.17	7914.80	0.789	10.773
最大変位 (cm) λ_{Ymax}	103.529	84.092	99.171	4.394	15.205
CPU TIME 4) (sec)	0.4	0.1	0.3		

1） 通常の部材剛性マトリックスに幾何学的非線形性を考慮する幾何剛性マトリックスを加えた部材剛性マトリックスを用いて変位法により解いた解
2） 幾何学的形状の変化を考慮した場合の解と、変位法による解の相対誤差の絶対値
3） 幾何学的形状の変化を考慮しない場合の解と、変位法による解の相対誤差の絶対値
4） DEC3000/300 による計算時間

また、幾何学的非線形性を考慮した場合と考慮しない場合の解の相対的な変化は、3,15,21 部材トラスでは部材の応力度に関して 0.4%～2.9%程度、最大変位に関して 0.0%～1.0%程度と比較的小さな変化にとどまっているが、33 部材アーチトラスの場合には、応力度が極端に小さい部材を除き部材の応力度に関して 2.7%～25.8%程度、最大変位に関して 15.2%程度の変化が見られ、幾何学的非線形性の影響を考慮して解析することの重要性が明らかである。

「参考文献」1)大久保禎二・和多田康男・西村一隆：変動荷重を受けるトラス構造物のエネルギー原理に基づく弾塑性履歴挙動の解析法に関する研究，土木学会論文集　第 519 号／I-32, pp.57～66, 1995,7