

I - A7

変位境界値問題におけるグリーン関数の誘導とその応用

前田建設工業 正 員 近藤 眞生
名古屋工業大学 正 員 長谷部 宣男

1. はじめに

グリーン関数は、変位境界値問題、外力境界値問題、混合境界値問題などの境界値問題においてそれぞれの境界条件を dislocation や集中荷重が存在していて満足している関数である。このグリーン関数を境界積分方程式、境界要素法に用いることにより、境界が複数ある場合の解析もより容易に行なうことができる。本報告では、変位境界値問題において、領域内に dislocation が存在する時のグリーン関数を誘導し、その応用として剛体介在物とその近傍に存在するクラックとの干渉問題について解析を行なった。また、類似の問題の外力境界値問題の解は既に得られている【1】。

2. 一般解の誘導

図1に示されるような無限板中に変位が与えられる境界（一般性を失うことなく変位0とできる。いまこの境界を剛境界と呼ぶ）が存在し、領域内に dislocation が存在する場合を考える。解析には z 平面の解析領域を ζ 平面の単位円外に写像する写像関数 $z = \omega(\zeta)$ を用いて、 ζ 平面の単位円外で正則な複素応力関数 $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ の一般解を求める。また、次式の有理型写像関数 $\omega(\zeta)$ を用いる【2】。

$$z = \omega(\zeta) = E_0 \zeta + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \quad (1)$$

ここで、 $E_0, E_{-1}, E_k, \zeta_k$ は複素定数である。次に複素応力関数 $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ を次式の形で表現する。

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\phi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$ は dislocation の関数を表し、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= -\frac{D}{2\pi} \log(\zeta - \zeta_0) \\ \psi_1(\zeta) &= -\frac{\bar{D}}{2\pi} \log(\zeta - \zeta_0) + \frac{D}{2\pi} \frac{\overline{\omega(\zeta_0)}}{\omega'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0)} \end{aligned} \quad (3)$$

ζ_0 は複素平面における dislocation の位置の座標を表し、 D は $D = D_1 + iD_2$ で実軸方向、虚軸方向の食い違いを表す。また、境界上で変位がない部分が存在するので剛境界の解析接続より次式が得られる。

$$\psi(\zeta) = \kappa \bar{\phi}(1/\zeta) - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) \quad (4)$$

この式(4)に式(2)を代入すると次式が得られる。

$$\psi_2(\zeta) = \kappa \bar{\phi}_2(1/\zeta) - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_2'(\zeta) + \kappa \bar{\phi}_1(1/\zeta) - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_1'(\zeta) - \psi_1(\zeta) \quad (5)$$

さらにこの式(5)に式(3)を代入し、 $\psi_2(\zeta)$ が単位円外 S^+ で正則となるように $\phi_2(\zeta)$ を決定すると次式が得られる。

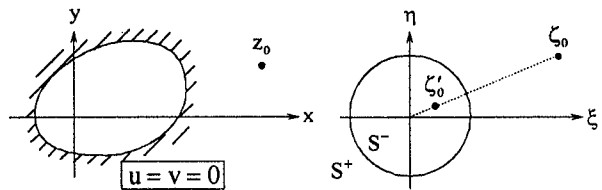


図1 物理面と単位円

キーワード：グリーン関数、変位境界値問題、Dislocation、クラック、剛体介在物

〒466 愛知県名古屋市昭和区御器所町

TEL 052-735-5482 FAX 052-735-5482

$$\phi_2(\zeta) = \frac{1}{\kappa} \left\{ - \sum \left(\bar{A}_k - \frac{\bar{D}}{2\pi} \frac{1}{\zeta'_k - \zeta_0} \right) \frac{B_k}{\zeta - \zeta_k} - \frac{\bar{D}}{2\pi} \frac{\omega(\zeta_0) - \omega(1/\zeta_0)}{\omega'(\zeta_0)} \frac{\zeta_0'^2}{\zeta - \zeta_0'} - \frac{D}{2\pi} \log \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta_0 \right) \right\} \quad (6)$$

以上、式(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)より $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ が得られる。

この変位境界を満足する、グリーン関数の式の応用例として、図2に示される矩形剛体介在物とその近傍にクラックが存在する問題を解析した。次式のように無次元化したクラック先端A、Bの応力拡大係数の結果を図3-a、bに示す。

$$F_I = \frac{K_I}{p\sqrt{\pi a}} \quad (8)$$

ここで、 p は一様引張荷重であり、 a は剛体介在物の大きさを表している。図3において横軸は対称軸上でのクラックの占める割合を表し、横軸の増加は近傍クラックの進展を表す。図3によれば、クラック先端Bは剛体介在物の影響を受けクラックの進展が止まる傾向にあることを表している。

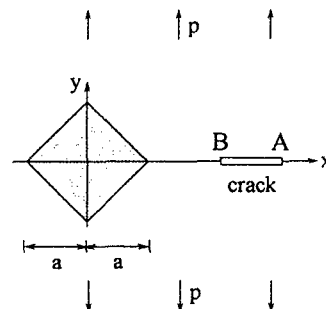


図2 矩形剛体介在物と近傍クラック

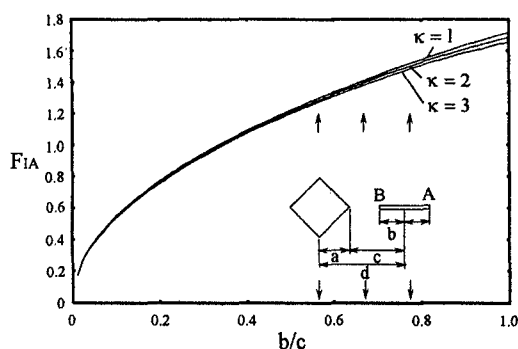


図3-a A点の応力拡大係数 ($a/d = 0.25$)

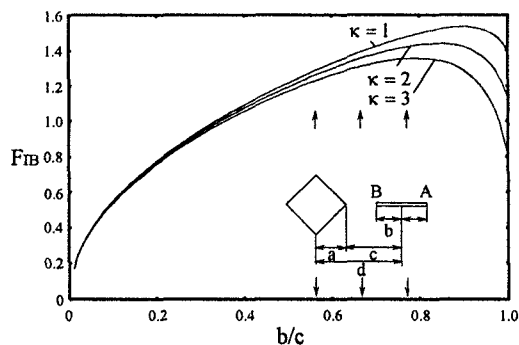


図3-b B点の応力拡大係数 ($a/d = 0.25$)

3. まとめ

変位境界値問題において領域内に dislocation が存在する場合の一般解（グリーン関数）を誘導した。この問題における一般解 $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ の誘導は、 $\psi(\zeta)$ の正則条件を用いることにより難しい積分式等を用いることなく求めることができた。集中力の場合のグリーン関数も係数の違いのみで全く同様にして誘導される。応用例として示した介在物近傍にクラックが存在する問題においては、グリーン関数を用いたことにより、介在物の境界条件は厳密に満足され、クラック上の境界条件を満足する積分方程式を数値的に解いて解析された。クラックのみに対する数値計算でありその計算は容易である。また、応用例では矩形剛体介在物の場合の応力拡大係数を示したが、一般解の中に含まれる有理型写像関数 $z = \omega(\zeta)$ を変えることにより、矩形形状だけでなく他の形状についても解析することができる。

【参考文献】

- 【1】 Norio Hasebe and Y.Z.Chen, 「Stress intensity solutions for the interaction between a hole edge crack and a line crack」, International Journal of Fracture 77 : 351-366 1996
- 【2】 N.Hasebe, K.Yoshikawa, M.Ueda and T.Nakamura, 「Plane elastic solution for the second mixed boundary value problem and its application」, Archive of Applied Mechanics 64 : 295-306 1994