土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

I－A6　高速多重極境界要素法による２次元静弾性問題の解析

福井大学大学院　学生員　○　持田哲郎
福井大学工学部　正会員　　福井卓雄

1　はじめに

2 次元静弾性問題の高速多重極境界要素法を定式化し，いくつかの数値解析例でその有効性を確認する。

境界要素法の問題点の一つは，離散化後の代数方程式が密行列の係数を持つことであり，問題の自由度が大きくなると方程式を解くのに膨大な計算を必要とすることである。著者らは，この問題点を解決する手段として，N 体問題の解析に用いられている高速多重極法 [1] を使った高速多重極境界要素法を提案してきた。

本研究では，2 次元静弾性問題の高速多重極境界要素法の定式化において，境界積分方程式および境界要素法については通常の実数関数としての定式化を行ない，多重極展開とその局所展開には複素解析関数の表現を用いる方法をとった [2]。こうすることにより，従来からの境界要素法との適合性をとりながら，かつ高速多重極法の導入が容易になる。

2　２次元静弾性問題における境界要素法

ここでは等方等質の線形弾性体を扱い，物体力は考慮しない。2 次元静弾性問題の基礎式は Navier の方程式

$$G\left(u_{i,jj}+\frac{2}{\kappa-1}u_{j,ji}\right)=0 \tag{1}$$

により与えられる。ここに，u_i は変位，G はせん断弾性係数，κ は Poisson 比 ν により決まるパラメータで，平面ひずみのとき $\kappa=3-4\nu$，平面応力のとき $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ である。

Somigliana の公式より，領域 B の内部で (1) を満足する変位とその境界値との間には積分関係

$$C_{ij}u_j(\boldsymbol{x})=\int_{\partial B}G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})s_j(\boldsymbol{y})\,ds_y-\int_{\partial B}S_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})u_j(\boldsymbol{y})\,ds_y \tag{2}$$

がある。ここに，$C_{ij}(\boldsymbol{x})=\delta_{ij}\ \boldsymbol{x}\in B,\ (1/2)\delta_{ij}\ \boldsymbol{x}\in\partial B,\ 0\ \boldsymbol{x}\in\overline{B+\partial B}$ であり，$s_i=n_j\sigma_{ij}$ は境界上の応力ベクトル，G_{ij} と S_{ij} は基本特異解と第二基本特異解である。境界要素法は，(2) を境界値の拘束条件として，与えられた境界条件に対して積分方程式を導き，これを離散化して数値的に解く方法である。

3　高速多重極境界要素法

積分方程式 (2) を離散化した線形代数方程式は密行列の係数を持つ。そこで，高速多重極法を使って行列ベクトル積を高速に計算し，繰り返し解法により方程式を解いて計算量を減少させる。

N 個の要素が存在するとき，それらの要素による弾性ポテンシャル (変位・応力) の値を各要素の上におかれた選点の上で求める問題を考える。直接的にこの計算を行なえば，$O(N^2)$ の計算が必要であるが，これを $O(N)$ の計算で処理するように工夫された方法が高速多重極法である。

高速多重極法の計算の中で必要となる多重極展開および局所展開の定式化には，複素解析関数の表現を用いた。二つの解析関数 $\phi(z)$, $\chi(z)$ を用いて基本特異解を表すと，

$$\phi(z)=-\frac{P}{4\pi(\kappa+1)}\log z,\qquad \chi(z)=\frac{\kappa\overline{P}}{4\pi(\kappa+1)}z\log z \tag{3}$$

キーワード　高速多重極境界要素法, 2 次元静弾性問題
連絡先　〒910 福井市文京 3-9-1 福井大学工学部環境設計工学科, TEL. 0776-27-8596, FAX. 0776-27-8746

となる。ここに, $P = P_1 + iP_2$ は点 $\boldsymbol{y}$ に作用する集中力を表す。また, 多重極展開は

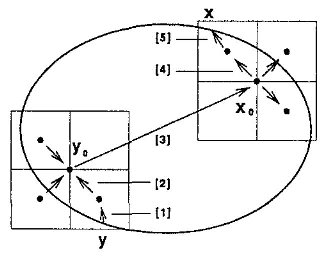
$$\phi(z) = -M_0 \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{z^n}, \quad \chi(z) = N_{-1} z \log z - N_0 \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{z^n} + C \tag{4}$$

と表せる。ここに, M_n, N_n は多重極展開の係数であり, C は変位および応力には関与しない定数である。変位あるいは応力を求めるべき点が多重極点から十分に離れている場合には, 複素ポテンシャルを求めるべき点の近傍で Taylor 展開して,

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n, \qquad \chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n z^n \tag{5}$$

を用いてこれらの量を計算することができる。

高速多重極法の計算過程は, 図 1のように示され, 一つの要素からの影響は, 過程 [1]〜[5] を経て評価される。



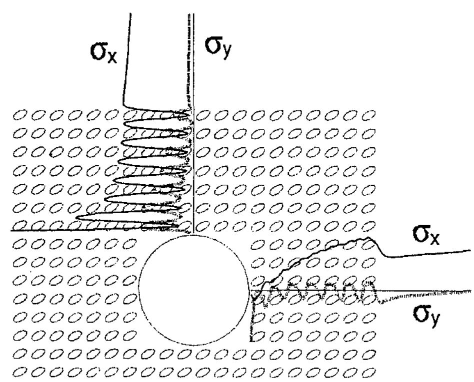
図–1 高速多重極法の計算過程

まず, セルに含まれる要素の効果をセルの中心点について多重極展開し, その係数を計算する (過程 [1])。つぎに, 子セルの多重極展開の中心を親セルの中心に移動し, それぞれの子セルからの効果を重ね合わせ計算する (過程 [2])。つぎに, 遠方の多重極の係数を Taylor 展開の係数に変換する (過程 [3])。さらに, このセルに子がある場合には, Taylor 展開の中心を移動させて係数を変換し親セルの係数を子セルの係数として引き継ぐ (過程 [4])。最後に, Taylor 展開係数を用いて各点の上で必要なポテンシャルの値を計算する (過程 [5])。すべての計算はセル毎に行われるから, 計算量は $O(N)$ の程度であり, 総計算量も $O(N)$ となる。

4　多数の空孔が分布する領域の解析

大きな自由度の問題が扱える高速多重極境界要素法の応用例として, 多数の空孔が存在する無限領域の解析を行なった。無限領域中に縦横一定のピッチで空孔が格子状に配列されているとする。ここでは, 空孔は 20×20 に配列されているとした。一つの空孔を 48 要素で近似した場合, 全要素数は 19,200 で自由度は 38,400 である。方程式を解くための繰り返し回数は 10〜15 回程度で, 全体の計算時間は 25〜40 分程度であった。また, 30×30 の問題では自由度が 86,400 になるが, この場合でも 1 時間程度で解けている。

また, 大きな円孔の周辺に多数の小さな空孔が分布している領域の解析も行った。方程式を解くための繰り返し回数は 15〜20 回程度で, 全体の計算時間は 1 時間〜1 時間 30 分程度であった。一般に, 応力集中の程度が高く, 解となる境界値の変動が大きいほど, 繰り返し回数が増加する傾向にある。図 2に, 中心に半径 $a = 3.0L$ の円孔が存在し, その周辺に一定のピッチ L で長径 $a = 0.4L$, 短径 $b = 0.2L$ の楕円孔を 30 度傾けて配列して, 無限遠に直応力 $\sigma_x = \sigma_0$ を作用させた場合の対称軸上の応力成分の分布を示す。



図–2 対称軸上の応力成分の分布

参考文献

[1] Greengard, L. and V. Rokhlin : A fast algorithm for particle simulations, *J. Comp. Phys.*, **73** (1987) pp. 325–348.
[2] 福井卓雄, 持田哲郎 : 高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, **13** (1996) pp. 131–136.