土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

I－A2

応力境界・変位境界をそれぞれ二カ所有する熱弾性混合境界値問題の解析

東　急　建　設　　正会員　吉　川　和　夫
名古屋工業大学　　正会員　長谷部　宣　男

1.はじめに　一様熱流を受ける混合境界値問題として，応力境界，変位境界をそれぞれ一カ所有する解析[1]は報告されている。本報告では一様熱流下で応力境界，変位境界がそれぞれ二カ所存在する混合境界値問題の解析を行う。解法には，任意形状の孔を有する無限領域を単位円外に写像する有理型写像関数とThermal dislocationを用いて，単位円外で正則となる複素応力関数の一般解を誘導する。解析例として，矩形孔（境界面での熱の出入りはない）に発生したはく離を考え，この一般解により求められるはく離先端での特異性を表すはく離応力の強さ(Stress Intensity of Debonding：SID)を示す。この解析モデルは，矩形孔の縁周を剛に補強された場合のモデル，弾性体に埋め込まれら剛体介在物のモデル等である。

2.解析方法　解析には，図-1 に示す解析領域（z-plane）を単位円外（ζ-plane）に写像する分数の和の形で表される次式の有理型写像関数を用いる[2]。

$$Z=\omega(\zeta)=E_0\zeta+\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta}+E_{-1} \qquad (1)$$

ここに，E_0，E_k，E_{-1}，ζ_kは形状定数である。境界条件を応力で与える境界をL_j（$j=1,2$），変位で与える境界をM_j（$j=1,2$）とする[図-1]。解析領域の変位境界と応力境界の接点の座標を$Z_{\alpha j}$，$Z_{\beta j}$（$j=1,2$），それに対応するする単位円上の点をα_j，β_j（$j=1,2$）とする。このパラメーターα_j，β_j ($j=1,2$)を変化させることにより，境界接点（はく離先端位置）を変えることができる。応力，変位の境界条件式は次式で与えられる[1]。

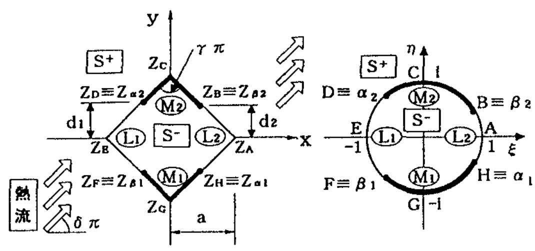


図-1　解析領域と単位円

$$\phi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=i\int(p_x+ip_y)ds \qquad \text{on } L_j\ (j=1,2) \qquad (2)$$

$$\kappa\phi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}=2G(u+iv)-2G\alpha'\int\Psi(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma \qquad \text{on } M_j\ (j=1,2) \qquad (3)$$

ここに，$\phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$は単位円外で正則な複素応力関数，$\Psi(\zeta)$は単位円外で正則な複素熱関数，νはポアソン比，αは熱膨張係数，G はせん断弾性係数である。κ, α'は，平面ひずみ状態で$\kappa=3-4\nu$，$\alpha'=(1+\nu)\alpha$，一般化された平面応力状態で$\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$，$\alpha'=\alpha$である。p_x，p_yは応力境界上(L_j)のx, y方向外力，u，v は変位境界上(M_j)でのx, y方向変位，σは単位円上のζ，s は境界に沿う座標を表す。

それぞれの境界上で境界条件を次式のように与える。

$$i\int(P_x+iP_y)ds=C_1+C_2=0 \quad \text{on } L_1 \qquad i\int(P_x+iP_y)ds=C_2 \quad \text{on } L_2$$

$$2G(u+iv)=0 \quad \text{on } M_j\ (j=1,2) \qquad (4)$$

ここに，C_1，C_2は変位境界上の合力である。式(3)右辺の第２項の積分項において孔の回りを一周する時に発生する多価関数を打ち消すThermal Dislocation［$\phi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$］を考え，求めたい一般解を次式でおく[1]。

$$\phi(\zeta)=\phi_1(\zeta)+\phi_2(\zeta) \qquad \phi_1(\zeta)=A\log\zeta \qquad A=\frac{\alpha qRG}{2k}E_0\left(\sum E_k e^{-i\delta}+e^{i\delta}\overline{E_0}\right)$$

$$\psi(\zeta)=\psi_1(\zeta)+\psi_2(\zeta) \qquad \psi_1(\zeta)=\overline{A}\log\zeta \qquad (5)$$

ここに，q は熱流，δは熱流の作用方向，k は熱伝導率を表す。式(2),(3),(5)および応力境界上の解析接続よりRiemann-Hilbert 問題に帰着し[1]，その解は次式で表される[3]。

$$\phi_2(\zeta)=\frac{\chi(\zeta)}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{C_2}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma+\frac{\chi(\zeta)}{2\pi i}\int_M\frac{H(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\sigma+\chi(\zeta)Q(\zeta) \qquad (6)$$

キーワード：熱弾性，一様熱流，混合境界値問題，複素応力関数，はく離

〒150　東京都渋谷区渋谷1-16-14　渋谷地下鉄ビル内　TEL　03-5466-5189　FAX　03-3797-7547
〒466　愛知県名古屋市昭和区御器所町　TEL　052-735-5482　FAX　052-735-5482

$$H(\sigma)=\frac{\alpha qRG}{2k}(1+\kappa)\left[\frac{E_0{}^2e^{-i\delta}}{2}\sigma^2+\sum(E_0e^{-i\delta}\zeta_k+\frac{\overline{E_0}e^{i\delta}}{\zeta_k})\frac{E_k}{\zeta_k-\sigma}-\sum(E_0e^{-i\delta}-\frac{E_0e^{i\delta}}{\zeta_k{}^2})E_k\{\log\frac{\sigma}{\zeta_k-\sigma}\}\right]$$

$\chi(\zeta)$はPlemelj関数［$\zeta\to\infty$で$\chi(\zeta)/\zeta^2\to 1$］であり，境界上で次式の条件を満足するように決められている。

$$\chi(\zeta)=(\zeta-\alpha_1)^m(\zeta-\beta_1)^{1-m}(\zeta-\alpha_2)^m(\zeta-\beta_2)^{1-m}\qquad m=0.5-i(\log\kappa)/(2\pi) \tag{7}$$

$$\chi^+(\zeta)=\chi^-(\zeta)\quad \text{on}\ L_1, L_2\qquad \chi^+(\zeta)=-\frac{1}{\kappa}\chi^-(\zeta)\quad \text{on}\ M_1, M_2 \tag{8}$$

肩符は，境界上に単位円外(S^+)から近づく時の値を＋，単位円内(S^-)から近づく時の値を−で表している。$Q(\zeta)$は未定有理型関数で，$\psi(\zeta)$が領域内(S^+)で正則となるように決められ，最終的に一般解は次式で求まる。

$$\phi(\zeta)=A\log\zeta-\chi(\zeta)\sum_{k=1}^{n}\frac{(\overline{A_k}+\overline{A}\zeta_k)B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k-\zeta)}+\frac{\alpha qRG}{2k}[\frac{E_0{}^2e^{-i\delta}}{2}\{\zeta^2-\chi(\zeta)\}+\sum_{k=1}^{n}(E_0e^{-i\delta}\zeta_k+\frac{\overline{E_0}e^{-i\delta}}{\zeta_k})\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta}\{1-\frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)}\}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(E_0e^{-i\delta}-\frac{\overline{E_0}e^{-i\delta}}{\zeta_k{}^2})E_k\{\log\frac{\zeta}{\zeta-\zeta_k}+\chi(\zeta)\int_0^{\zeta_k}\frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)}\}]+C_2\frac{\chi(\zeta)}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{d\sigma}{\chi(\zeta)(\sigma-\zeta)} \tag{9}$$

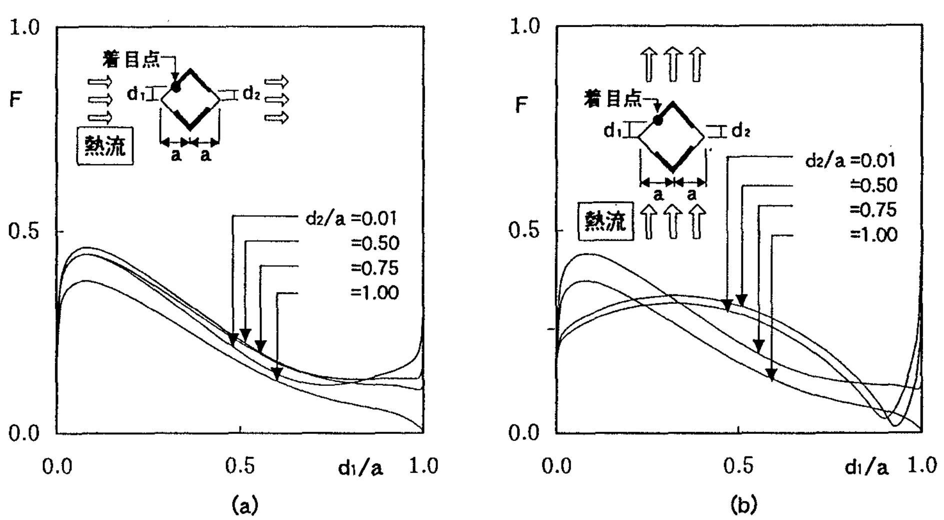
ここに，$\zeta_k'=1/\overline{\zeta_k}$，$A_k=\phi_2'(\zeta_k')$，$B_k=E_k/\overline{\omega(\zeta_k')}$である。式(9)において右辺に積分項が存在するが，応力計算を行う際にはこの一次，二次導関数が必要で，この一次，二次導関数は積分形でない閉じた形で求められる[1]。また，合力C_2は$\phi'(\infty)=0$の関係式より得られる。この一般解は，応力境界・変位境界がそれぞれ1カ所有する場合の一般解と比較して複雑となる。この理由に，Plemelj関数が複雑となること，一般解の関数$\phi(\zeta)$が積分項を含むこと，その導関数が必要なこと，合力C_2の計算が必要となること等が挙げられる。

3.解析例　図−2(a)(b)は，熱流の作用方向$\delta\pi$=0°，90°の2ケース（材料定数κ=2）について，右側はく離長さ(d_2/a)を固定した4ケースに対して，横軸の左側はく離長(d_1/a)を変化させた時の$Z_{\alpha 2}$側のSIDを表したものである。ここで，はく離はx軸に対称としている。はく離応力の強さ(SID)は次式で無次元化している。

$$F=\frac{k}{\alpha qGR}\frac{|\tilde{\alpha}_d|}{\sqrt{a^3}} \tag{10}$$

ここに，$\tilde{\alpha}_d$ははく離先端での特異性を表す指標で，その誘導については文献[4]に報告されており省略する。

解析結果より，$Z_{\alpha 2}$側では熱流方向に関係なく，SIDが左側はく離(d_1/a)発生後に単調増加を示し，その後極値を示し減少することからはく離はある長さで停止するものと考えられる。右側はく離長d_2/a=1.00の時はSIDは零に収束する。また，任意方向の熱流に対するSIDは，$\delta\pi$=0°,90°の結果の重ね合わせにより得られる。



図−2　$Z_{\alpha 2}$点での無次元化したはく離応力の強さ[κ=2，$\gamma\pi$=90°]　(a)$\delta\pi$=0°，(b)$\delta\pi$=90°

【参考文献】
[1] N.Hasebe et al., J. of Appl Mech, ASME, 1991.
[2] J.Iida et al., J. of Engrg Mech, ASCE, 1987.
[3] Muskhelishvili.N.I, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Noordhoff, Groningen, 1963
[4] N.Hasebe et al., J. of Appl Mech, ASME, 1988.