土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

I－A1　軸対称変形をする円柱直交異方性体の熱弾性ポテンシャルについて

北見工業大学　フェロー　奥村　勇
静岡大学　工学部　　　野田直剛

１．まえがき　異方性体には種々の部類があるが、実用的な材料の視点から、横等方性体、直交異方性体及び円柱異方性体が重要になっている。この中、横等方性体については、熱弾性解が比較的容易に得られ、直交座標及び円柱座標における解が既に発見されている。然しながら、直交異方性体及び円柱異方性体の３次元熱弾性解は、あまり見当らない様である。円柱異方性体においても、３つの弾性対称面を持ち、９つの独立な弾性定数を持つ直交異方性体が考えられ、本研究においては、それを円柱直交異方性体と呼ぶ。円柱直交異方性体の熱弾性解は、一般的な解法によれば、変位ポテンシャルを用いて求めることになる。然しながら、円柱直交異方性体の非軸対称問題は、独立な弾性定数の数が多いため、変位ポテンシャルの支配方程式における係数が余りにも不揃いになり、変位ポテンシャルの効力が殆ど発揮されない程に難解である。

本研究は、軸対称問題における円柱直交異方性体の熱弾性ポテンシャルを求めるものである。軸対称問題は、非軸対称問題に比べて、解の仮定が簡明であり、また、解の誘導もはるかに容易になる。

２．変位のつり合い方程式　応力成分、ひずみ成分および弾性定数を、それぞれ、$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ および c_{ij} で表すと、軸対称問題における円柱直交異方性体の熱を考慮した一般化された Hooke の法則は次式となる。

$$\sigma_{rr} = c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - \beta_1 T \ ; \ \sigma_{\theta\theta} = c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{22}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{23}\varepsilon_{zz} - \beta_2 T \qquad (1\,\mathrm{a,b})$$

$$\sigma_{zz} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{23}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - \beta_3 T \ ; \ \sigma_{zr} = 2c_{55}\varepsilon_{zr} \ ; \ \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0 \qquad (1\,\mathrm{c-e})$$

ここで、T は、温度変化を表し、β_1 ，β_2 および β_3 は、材料定数を表す。ひずみ－変位関係を用いて、式（１ａ－ｅ）を応力のつり合い方程式に代入すると、変位のつり合い方程式が次の様に得られる。

$$c_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) - c_{22}\frac{u_r}{r^2} + c_{55}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + (c_{13}-c_{23})\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z} = \beta_1\frac{\partial T}{\partial r} + (\beta_1 - \beta_2)\frac{T}{r} \qquad (2\,\mathrm{a})$$

$$c_{55}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + (c_{23}+c_{55})\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} = \beta_3\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (2\,\mathrm{b})$$

ここで、u_r 及び u_z は、変位成分を表す。

３．解の誘導　変位成分を次式の様に仮定する。

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \ , \ u_z = k\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (3\,\mathrm{a,\ b})$$

ここで、k は、後に定める任意定数を表す。式（３ａ，ｂ）を式（２ａ，ｂ）に代入すると、熱弾性ポテンシャルの支配方程式が、次の様に得られる。

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{c_{55} + k(c_{13}+c_{55})}{c_{11}}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{c_{13}+c_{55}}{c_{11}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + k\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)$$
$$= \frac{1}{c_{11}}\left[\beta_1\frac{\partial T}{\partial r} + (\beta_1 - \beta_2)\frac{T}{r}\right] \qquad (4\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{c_{33}k}{c_{55}k + c_{13} + c_{55}}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{c_{13}-c_{23}}{c_{55}k + c_{13} + c_{55}}\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{c_{55}}{c_{55}k + c_{13} + c_{55}}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)$$
$$= \frac{\beta_3 T}{c_{55}k + c_{13} + c_{55}} \qquad (4\,\mathrm{b})$$

いま、式（４ａ，ｂ）を視察して、　$k = (c_{11}\nu - c_{55})/(c_{13} + c_{55})$; $c_{33}k/(c_{55}k + c_{13} + c_{55}) = \nu$　（５ａ，ｂ）

キーワード：　熱弾性，異方性，円柱直交異方性，熱弾性ポテンシャル，軸対称変形.
連絡先：　〒090　北見市公園町 165 番地，TEL (0157)26-9472，FAX (0157)23-9408.

と置くと、νを定める次の２次方程式を得る。

$$c_{11}c_{55}\nu^2+[c_{13}(c_{13}+2c_{55})-c_{11}c_{33}]\nu+c_{33}c_{55}=0 \tag{6}$$

式（５ａ，ｂ）を式（４ａ，ｂ）に代入し、

$$\Phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{7}$$

と置くと、次式を得る。

$$L_1\psi=F_1 \ , \ L_2\psi=F_2 \tag{8a, b}$$

ここで、

$$L_1=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right) \ ; L_2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{9a, b}$$

$$F_1=-\frac{c_{11}}{c_{13}+c_{55}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+k\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\right]+\frac{1}{c_{13}+c_{55}}\left[\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+(\beta_1-\beta_2)\frac{T}{r}\right] \tag{10a}$$

$$F_2=-\frac{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}{c_{55}}\left(\Phi-\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\beta_3}{c_{55}}T \tag{10b}$$

式（８ａ，ｂ）に、それぞれ、L_2及びL_1をかけて減じ、その結果にr^2をかけると、次式を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right)\psi=r^2(L_2F_1-L_1F_2) \tag{11}$$

式（８ａ）に$(c_{55}-c_{13}+2c_{23})/(c_{13}+c_{55})$をかけて、式（１１）から減ずると、次式を得る。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{(c_{13}+c_{55})^2}{2(c_{13}-c_{23})^2}\left[r^3(L_2F_1-L_1F_2)-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}rF_1\right] \tag{12}$$

式（１２）を式（８ａ）に代入すると、次式となる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}+\left(3+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\right)\frac{1}{r}\right](L_2F_1-L_1F_2)-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{23}+c_{55}}{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}\frac{1}{r}\right)F_1=0 \tag{13}$$

上式に式（９ａ，ｂ）及び式（１０ａ，ｂ）を代入すると、結果としての解が次の様に得られる。

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial r}+\left(3+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\right)\frac{1}{r}\right]\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+k\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\right]\right.\\&\left.-\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{11}}\frac{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right)\left(\Phi-\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{55}k+c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right\}-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right.\\&\left.+\frac{c_{23}+c_{55}}{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+k\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{11}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\right]\\&\quad=\frac{1}{c_{11}}\left[\frac{\partial}{\partial r}+\left(3+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\right)\frac{1}{r}\right]\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{33}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+(\beta_1-\beta_2)\frac{T}{r}\right]-\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{55}}\beta_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right.\\&\qquad\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{13}-c_{23}}{c_{13}+c_{55}}\frac{1}{r}\right)T\right\}-\frac{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}{c_{11}(c_{13}+c_{55})}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{23}+c_{55}}{c_{55}-c_{13}+2c_{23}}\frac{1}{r}\right)\left[\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+(\beta_1-\beta_2)\frac{T}{r}\right]\end{aligned} \tag{14}$$

ϕが上式から定められれば、それを式（１０ａ，ｂ）に代入してF_1及びF_2を求め、それらを式（１２）の右辺に代入すると、ψが定められる。式（１４）及び式（１２）におけるϕ及びψが、軸対称問題における円柱直交異方性体の熱弾性ポテンシャルである。

４．あとがき　軸対称問題における円柱直交異方性体の変位のつり合い方程式を変位ポテンシャルを用いて解き、２つの熱弾性ポテンシャルを求めた。式（８ａ，ｂ）から式（１４）に示した様に、解は、比較的容易に誘導できる。式（１４）の解を等方性体に特殊化した時に、ϕが Goodier の熱弾性ポテンシャルに一致することは確認してある。非軸対称問題の熱弾性ポテンシャルは、今後の研究になるが、変位ポテンシャルによって表さられた変位仮定の適否及び支配方程式の連成が解けるか否かがポイントになりそうである。