CS-28　逆解析におけるプロセスノイズの役割に関する基礎的研究

東電設計　正会員　吉田郁政
正会員　豊田耕一
武蔵工業大学　正会員　星谷勝

1．はじめに

観測情報は一般に時間方向に複数得られており、あるステップにおける逆解析の結果は次ステップの事前情報として引き継ぐ（時間更新する）ことができる。３つの条件 1)未知量と観測量の関係が線形、2)各ステップ間の観測量誤差が無相関、3)プロセスノイズを与えない、を満たしている場合は全ての観測量を同時に用いる逆解析と時間更新を行う逆解析は厳密に一致する。本報告では簡単な数値計算例を通して時間更新に際して付加されるプロセスノイズの役割について示す。

2．時間更新を行う逆解析

時間更新を行う逆解析のフローを図-1に示す。#2は通常の逆解析に相当し、下に示した式は確率論から誘導した目的関数をGauss-Newton法で解く式であり、カルマンフィルターの観測更新アルゴリズムに相当する。#4は時間更新アルゴリズムと呼ばれており、プロセスノイズはここで付加される。プロセスノイズの与え方の一つとして事前情報を基に式(1)の形で与える場合を考える。事前情報は式(2)で与えられる。

$$Q_k = cP_{k-1/k-1} \quad (1) \qquad P_{k/k-1} = Q_k + P_{k-1/k-1} = (1+c)P_{k-1/k-1} \quad (2)$$

この場合、kステップにおける事後の共分散行列は次のように求められ、

$$P_{k/k} = (P_{k/k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} = \left(\left(\frac{1}{1+c}\right)^{k-1} P_{1/0}^{-1} + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{1+c}\right)^{k-i} H_i^T R_i^{-1} H_i\right)^{-1} = \left(\left(\frac{1}{1+c}\right)^{k-1} P_{1/0}^{-1} + \sum_{i=1}^{k} H_i^T R_i^{*-1} H_i\right)^{-1}$$

ここで、$P_{1/0}$：*第1ステップにおける事前情報*　$R_i^* = (1+c)^{k-i} R_i$　(3)

nステップ前の観測量誤差の共分散行列を$(1+c)^n$倍することと等価であることがわかる。共分散行列の逆行列は重み行列として解釈できることから、cを大きくするほど最新の情報に重みを置く推定となる。極端な例としてc=0.0とすると、古いステップの情報も新しいステップの情報も同じ重みで扱うこととなり、c=∞とすると現在のステップの情報だけから推定を行うこととなる。

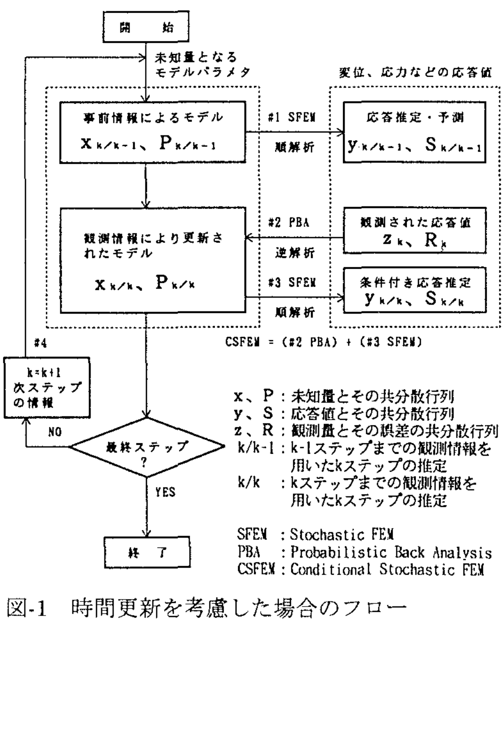

図-1　時間更新を考慮した場合のフロー

＃２　観測更新アルゴリズム

$$x_{k/k,i+1} = x_{k/k,i} + P_{k/k,i}\{H_{x\,k/k,i}^T R_k^{-1}(z_k - H(x_{k/k,i})) + P_{k/k-1}^{-1}(x_{k/k-1} - x_{k/k,i})\}$$

$$P_{k/k,i} = (P_{k/k-1}^{-1} + H_{x\,k/k,i}^T R_k^{-1} H_{x\,k/k,i})^{-1}$$

＃４　時間更新アルゴリズム

$$x_{k/k-1} = F(x_{k-1/k-1})$$

$$P_{k/k-1} = F_{x\,k-1/k-1}^T P_{k-1/k-1} F_{x\,k-1/k-1} + Q_k$$

定常の場合

$$x_{k/k-1} = x_{k-1/k-1}$$

$$P_{k/k-1} = P_{k-1/k-1} + Q_k$$

ここで

$H(\ )$：観測量と未知量を関係付けるモデル

$F(\ )$：未知量のステップ間の変化を表すモデル

Q：プロセスノイズの共分散行列

$$H_x = \partial H/\partial x,\quad F_x = \partial F/\partial x$$

３．数値計算例

図-2(1)に示すような s-z 平面の１０個のデータに対して直線 z=as+b を求める問題を考える。ここで、z を観測量、v を観測量誤差、s を場所を表す説明変数とする。未知量ベクトルを直線の傾き a、切片 b とすると次のように表すことができる。

$$z = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + v \qquad \boldsymbol{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} z^T = (32.0\ 48.0\ 56.0\ 60.0\ 62.0 \\ \quad 63.0\ 63.4\ 63.7\ 63.9\ 64.0) \\ \boldsymbol{x}^T = (a\ \ b) \end{array} \tag{4}$$

この全観測量を同時に用いると図-2(1)に示した実線が求まる。各観測量誤差の標準偏差は同じ大きさで誤差は無相関とした。次にデータを s 座標の小さな順に２個ずつの５ステップのデータに分けて考えた。たとえば１、２ステップのデータは次のように記述される。

$$z_1^T = (32.0\ \ 48.0)\ ,\ z_2^T = (56.0\ \ 60.0) \qquad H_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ H_2^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

前述の時間更新を考慮した考え方（#4 は定常）により求めた直線を図-2 に破線で示す。プロセスノイズなしとしており、前述の３つの条件を満たしているので５ステップ目の結果は全データ同時の場合の結果と完全に一致している。未知量である傾きや切片の標準偏差も５ステップ目の結果は完全に全データ同時の場合と一致している。図には参考のため各ステップ独立に解いた場合の標準偏差も示している。次にプロセスノイズを与えた場合の結果を図-3 に示す。プロセスノイズは式(3)に従って与えており、c=0.2, 1.0, 5.0 の３ケースの計算を行った。例えば、c=1.0 のケースは１ステップ前の情報の重みを 1/2 に、３ステップ前の情報の重みを 1/8 にしていることに相当する。c=0.2 のケースはプロセスノイズを与えない場合と大きな違いはないが、c=1.0, 5.0 と大きくするに従い得られる直線の傾向が変化しており、データに対する接線に近くなってくる。未知量の標準偏差も全データ同時のケースよりも大きくなり、各ステップ独立の場合の標準偏差に近くなっている。プロセスノイズは任意の形で与えることもできる。その場合は一般に式(3)に示されるような明快な関係は得られないが、プロセスノイズを大きくするほど新しいデータの重みが大きくなるという定性的性質は変わらない。

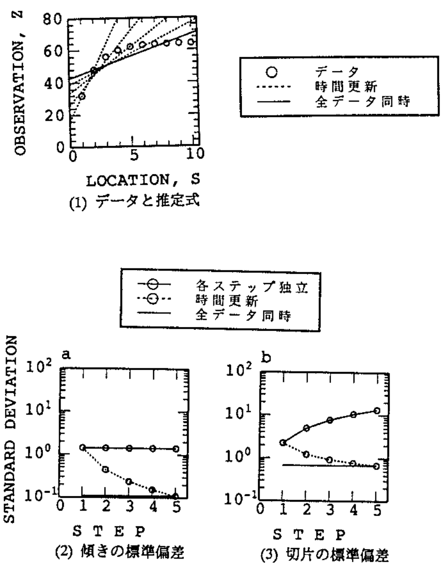

図-2　求められた直線と未知パラメタの標準偏差（プロセスノイズなし）

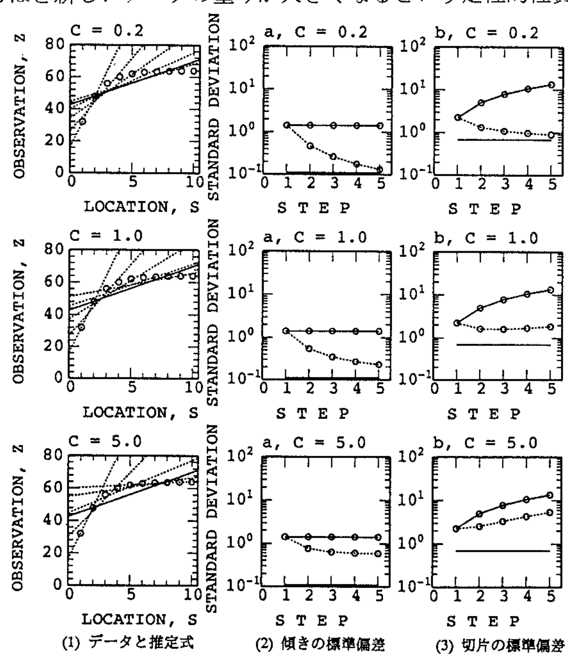

図-3　求められた直線と未知パラメタの標準偏差　プロセスノイズのレベル（ c = 0.2, 1.0, 5.0 ）