土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

CS-26

カルマンフィルタによる潮汐流推定

アイ・エヌ・エー　正会員 高木 利光
中央大学　学生会員 早川 豊
中央大学　正会員 川原 睦人

1 はじめに

海洋構造物に対する影響および船舶の安全な航行を考慮する上で、潮流の流況を的確に把握することは極めて重要な問題である。しかし、沿岸域や内湾における流況は複雑である。そのため、空間的、時間的に密な観測を行わない限り現象を正しく捕らえる事は難しい。さらに、それら観測で得られたデータには、様々な要因によりもたらされる誤差が含まれている場合がある。本研究では、カルマンフィルタを用いて観測雑音を消去し、観測値を反映させた潮汐流の推定を行うものである。なお、一般に推定問題は、平滑問題・濾波問題・予測問題と分類できるが、本解析では濾波問題について検討した。

2 物理モデル

2.1 浅水長波方程式

潮汐流は次式の線形の浅水長波方程式により記述されるものと仮定する。

$$\dot{u}_i + g\eta_{,i} = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\eta} + hu_{i,i} = 0 \tag{2}$$

ここで、u_iはそれぞれ x-y 方向流速を、ηは水位変動量を示す。g は重力加速度 、h は水深である。境界は陸岸境界 S_1と開境界 S_2からなり、S_1上では法線方向流速を零に規定する条件を、また S_2上では水位変動量ηを規定する条件を与える。

$$u_i = \hat{u}_i \qquad on \quad S_1 \tag{3}$$

$$\eta = \hat{\eta} \qquad on \quad S_2 \tag{4}$$

2.2 有限要素方程式

流速および水位変動量に対して三角形一次要素による内挿補間関数を用い、ガラーキン法を適用すると、以下の有限要素方程式が得られる。

$$M_{\alpha\beta}\dot{u}_\beta + gH_{\alpha\beta i}\eta_\beta = 0 \tag{5}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{\eta}_\beta + hH_{\alpha\beta i}u_{\beta i} = 0 \tag{6}$$

ここで、

$$M_{\alpha\beta} = \int_V (\Phi_\alpha\Phi_\beta)dV, \qquad H_{\alpha\beta i} = \int_V (\Phi_\alpha\Phi_{\beta,i})dV$$

である。時間方向の離散化に関しては、カルマンフィルタへの適用を考慮し陽的オイラー法を用いる。

$$\bar{M}_{\alpha\beta}u_{\beta i}^{n+1} = \tilde{M}_{\alpha\beta}u_{\beta i}^{n} - \triangle tgH_{\alpha\beta i}\eta_\beta^n \tag{7}$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta}\eta_\beta^{n+1} = \tilde{M}_{\alpha\beta}\eta_\beta^{n} - \triangle thH_{\alpha\beta i}u_{\beta i}^n \tag{8}$$

ここで、$\triangle t$ は時間増分量、n は時間ステップ、$\bar{M}$ は集中化行列である。混合行列$\tilde{M}$は、数値計算上の安定化のために導入された次のようなものである。(川原、1983)

$$\tilde{M} = e\bar{M} + (1-e)M \qquad e: ランピングパラメータ$$

3 カルマンフィルタ

カルマンフィルタの基礎方程式は以下の式により構成される。

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k w_k \qquad (システム方程式) \tag{9}$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \qquad (観測方程式) \tag{10}$$

ここで、x_kは直接には観測できない状態ベクトル、F_kは状態遷移行列、H_kは観測行列、y_kは観測雑音を含む観測値からなる観測値ベクトル、そして w_k, v_k はそれぞれシステム雑音 観測雑音を意味する。本研究において、状態遷移行列 F_kは、式 (1)〜(2) を離散化した有限要素行列を用いている。

カルマンフィルタの理論を導く際に、次のようなことを仮定する。

(仮定 1) システム雑音、観測雑音はつぎのような特徴を持つものとする。

$$E\{w_k\} = 0, \quad cov\{w_k, w_j\} = E\{w_k w_j^T\} = Q_k\delta_{kj} \tag{11}$$

$$E\{v_k\} = 0, \quad cov\{v_k, v_j\} = E\{v_k v_j^T\} = R_k\delta_{kj} \tag{12}$$

ここで、E{} は期待値、Q_kおよび R_kは、それぞれシステム雑音、観測雑音の分散値であり、δ はクロネッカーのデルタである。雑音は白色雑音とし、相互無相関であると仮定する。

(仮定 2) 最適推定値 $\hat{x}_k$ は観測値 $Y_k = (y_0, y_1, \cdots, y_n)$ が与えられたときの条件付き平均値 である。

$$\hat{x}_k = E\{x_k|Y_k\} \tag{13}$$

(仮定 3) 全ての過程は正規分布に従う。

以上より、 最適推定値 $\hat{x}_k$ と推定誤差共分散 P_kおよびΓ_kは次のようになる。

$$\hat{x}_k = x_k^* + P_k H_k R_k^{-1}(y_k - H_k x_k^*) \tag{14}$$

$$P_k = (I - K_k H_k)\Gamma_k(I - H_k^T K_k^T) + K_k R_k K_k^T \tag{15}$$

$$\Gamma_k = F_k P_k F_k^T + G_k Q G_k^T \tag{16}$$

ここで、$\hat{x}_k^* = F_{k-1}\hat{x}_{k-1}$であり、また、$K$はカルマンゲインと呼ばれる行列で、各節点に対する観測点データの重み付けを示すもので、以下のように表わされる。

$$K_k = \Gamma_k H_k^T(R_k + H_k\Gamma_k H_k^T)^{-1} \tag{17}$$

ここで、式 (15) 〜 (17) を繰り返し計算し、共分散値の収束値を求める。流速および水位変動量の推定に際しては、収束した共分散値を基に、式 (14) により随時観測値を取り込むことで、それらの最適推定値を求める。なお、本解析では、状態遷移行列 F_kは定常と仮定する。

4 数値解析例

本手法の有効性を示すために、数値解析例を示す。千葉県御宿海岸を対象とした総節点数 159、総要素数 268 からなる有限要素分割 (図.1) を用い解析を行なった。図中の $No.1$〜$No.6$ の各点において 1995 年 5 月 17 日〜6 月 13 日に観測された流速および水位変動量から、本解析では、観測値として 5 月 19 日〜5 月 21 日の 4 日間のデータを用いた。解析上の各定数は、微小時間増分量 Δt を 0.1 秒、システムノイズ分散 R、観測ノイズ分散 Q を 0.001 とし、初期共分散 P_{-1} 、駆動行列 G をともに単位行列とした。

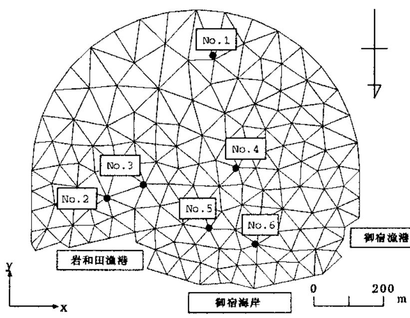

図 1: 有限要素分割図

図.2において、$No.6$ における x-y成分流速に関する推定結果を、また図.3において、水位変動量に関する推定結果を時系列で示す。なお、図中の○は観測値を、実線は本手法により推定された値を表している。これより、対象としている全時間で流速、水位変動量ともに観測値に追従した推定結果が得られていることが確認された。

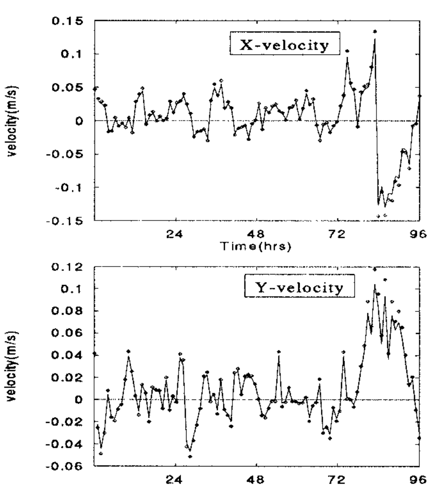

図 2: $No.6$ における流速推定結果

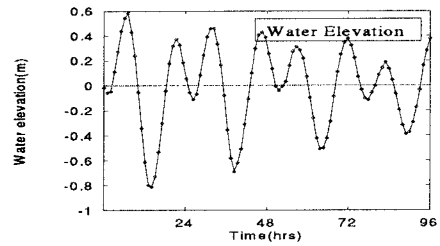

図 3: $No.6$ における水位変動量推定結果

流速推定結果より得られた残差流ベクトルの分布を示す (図.4)。これより、岩和田漁港沖および御宿漁港沿岸に流れが集中しているという推定結果が確認された。また、御宿海岸沖で流向が東西に分かれているという特性が推定された。なお、これらの流況特性は、6 地点の観測結果から得られたものと合致している。

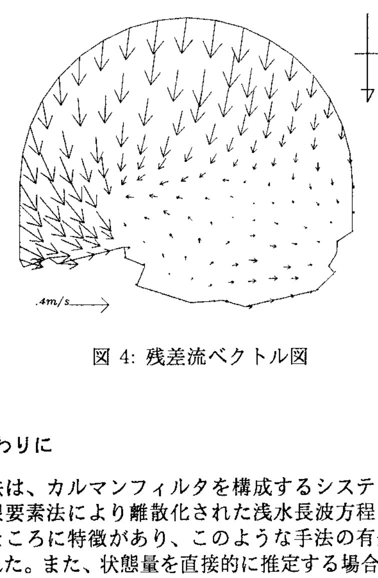

図 4: 残差流ベクトル図

5 おわりに

本手法は、カルマンフィルタを構成するシステム方程式に有限要素法により離散化された浅水長波方程式を導入したところに特徴があり、このような手法の有効性が確認された。また、状態量を直接的に推定する場合、解析領域の拡大に伴い、各行列の次元は必然的に高くなり、多くの計算時間を必要とする。本解析においては、観測点周辺のみの共分散計算を考慮することで、次元および計算時間低減が可能であった。

最後に本研究は、中央大学理工学研究所が千葉県御宿町からの委託研究として実施した研究の一部であり、ここに謝意を表する。

参考文献

1. 川原 睦人、吉田裕人,"新体系土木工学−有限要素法" 技報堂出版,1983
2. 片山 徹.,"応用カルマンフィルタ "朝倉書店,1983
3. Andrew P. Sage Chelsea C. White,"Optimum systems control" 2nd edition Prentice-Hall,Inc,1977
4. Heemink,A.W.,(1988),"Two-Dimensional Shallow Water Flow Identification"Appl. Math. Modelling Vol.12,pp.109-118