

CS-24 ABICを基礎とした拡張カルマンフィルタによる最適な地下水解析モデルの推定

清水建設（株）和泉研究室 正会員 奥野哲夫
同 上 鈴木 誠

1. はじめに 限られた事前情報から地盤構造物施工時の地下水挙動を予測するには、一般に解析モデルの構築に技術者の適切な判断を必要とする。ここで問題になるのが、構築された解析モデルの良し悪しを判断する規準である。この規準としてABIC (Akaike Bayesian Information Criterion) ¹⁾²⁾を採用することで、未知パラメータである透水係数の推定を行うと同時に、初期条件や境界条件など解析モデルとして具備すべき様々な条件を、モデル選定の立場から推定することが可能になる。ここでは拡張カルマンフィルタに基づく透水係数の空間分布推定法（逆解析）³⁾にABICを導入した手法を用い、地下水解析モデルの様々な条件推定を行った結果の妥当性について検討する。

2. 逐次同定とモデル選定の方法 逆解析では、その不適切性 (ill-posedness) を克服することが重要な問題である。著者が示した手法³⁾は主に透水係数の空間分布の推定に着目した手法であり、未知パラメータである透水係数（物性値）の数（領域数）を不必要に増加させないことも、不適切性の解決の一助となる²⁾⁴⁾。しかし、初期条件、境界条件など、その他の条件設定が適切に行われていなければ不適切性を顕在化させる可能性があり、同定結果の信頼性は低くなる。このような各種の条件も含めて、解析モデルの良し悪しを判断する規準の一つとしてABICが考えられる。以下ではこの考えをカルマンフィルタに導入した手法を示す。なお、以下の式中の記号は文献3)に従う。

まず事前に種々の条件設定を行った地下水解析モデルを数種類準備する。本手法の基本的な考えは、これら各種のモデル誤差に起因する予測誤差を事前分布と見なし、この事前分布の重み（モデル誤差の影響）を調整しながら、エントロピー最大化原理に基づき状態ベクトルの真の分布に対する予測分布（確率モデル）のあてはまりの悪さを示す指標ABICを最小にするモデル（地下水解析モデル）を最適なモデルとして選定する点にある。すなわち、地下水位や揚水量を観測値とする場合、初期条件や境界条件などの様々な条件は、各地下水位や揚水量を生成する背後のメカニズムを構成しており、確率モデルを通して見た最適なメカニズムをモデルとして選定する。これとは別に、得られた観測値に含まれる観測誤差をフィルタリングすることも不適切性を克服するための重要な課題である。このため観測誤差をいくつかの確率モデルとしてモデル化し、上記の方法でモデル選定することも可能と考えられる。

以上の各モデルを用いた透水係数の逐次同定アルゴリズムとABICの算定は以下の点に集約される。まず、拡張カルマンフィルタの観測更新アルゴリズムにおいて、時間更新アルゴリズムから得られる状態ベクトルの分散・共分散行列の一期先予測は一種のパネル行列であることから、それにどの程度の重みを与えるべきかという問題に帰着される。この重みを α^{-2} すると、カルマンゲイン K_t と分散・共分散行列 $P_{t|t-1}$ の時間更新アルゴリズムは以下の(1)式と(2)式のように与えられる。

$$K_t = [G_t^T R_t^{-1} G_t + (\alpha^2 \cdot P_{t|t-1})^{-1}]^{-1} G_t^T R_t^{-1} \quad (1)$$

$$P_{t|t-1} = F_{t-1} P_{t-1|t-1} F_{t-1}^T + Q_{t-1} \quad (2)$$

観測更新アルゴリズムにおいてカルマンゲインは正則化一般逆行列の一種として機能し、状態ベクトルの最適な修正量を与える。その際、 $P_{t|t-1}$ はペナルティ行列として逆解析における解の安定化に寄与する。この(1)式に基づく状態ベクトルの最適な修正量は(3)式の評価関数 J を最小にする一意な解を与える。

$$J(X_t) = (Y_t - G_t X_t)^T R^{-1} (Y_t - G_t X_t) + \alpha^{-2} (X_t - \hat{X}_{t|t-1})^T P_{t|t-1}^{-1} (X_t - \hat{X}_{t|t-1}) \quad (3)$$

カルマンフィルタのアルゴリズムを利用したABICの算定式は(4)式で与えられる。

$$\begin{aligned} ABIC(\alpha) &= -2 \cdot \sum_{t=1}^N \ln \int p_2(Y_t | X_t, R_t) \cdot p_1(X_t | \hat{X}_{t|t-1}, \alpha^2 P_{t|t-1}) dX_t \\ &\quad + 2 \cdot (\text{number of hyperparameters}) \\ &= m \cdot N \cdot \ln(2\pi) + \sum_{t=1}^N \ln |R_t| + \sum_{t=1}^N \left\{ \ln |\alpha^2 P_{t|t-1}| - \ln |P_{t|t}| \right\} \\ &\quad + \sum_{t=1}^N (Y_t - G_t \hat{X}_{t|t-1}) (R_t + G_t \cdot \alpha^2 P_{t|t-1} \cdot G_t^T)^{-1} (Y_t - G_t \hat{X}_{t|t-1}) \\ &\quad + 2 \cdot (\text{number of hyperparameters}) \quad (4) \end{aligned}$$

(4)式の総和は、1期毎に m 個のデータが得られる場合、時系列上で N 期まで加算して求める。更に複数の試験データを利用する場合は全試験データに亘って総和を求める⁴⁾。

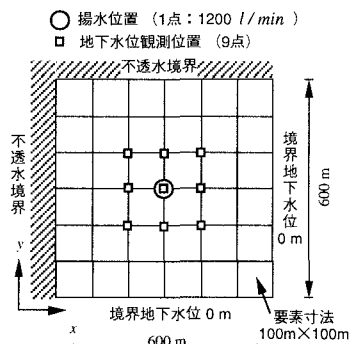


図-1 解析モデルと揚水試験配置

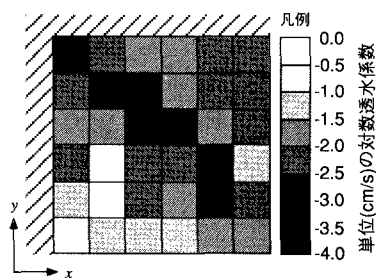


図-2 設定した真の透水係数

表-1 解析ケース一覧表

ケース	検討対象	真値	設定したモデル
推定I-a	地下水位の 観測誤差 (9ヶ所の 観測水位)	$N(0.0, 4.0)$ (正規分布； 平均値cm、 分散 cm^2)	$N(0.0, 16.0)$
推定I-b			$N(0.0, 8.0)$
推定I-c			$N(0.0, 4.0)$
推定I-d			$N(0.0, 2.0)$
推定I-e			$N(0.0, 1.0)$
推定II-a	初期水位	領域内 一律0.0m	一律-0.5m
推定II-b			一律0.0m
推定II-c			一律+0.5m
推定III-a	境界水位 (地下水位 指定境界)	0.0mで一定 (初期水位 のまま一定)	30日後に-1.0mになるよう一定率で減少
推定III-b			0.0mで一定
推定III-c			30日後に+1.0mになるよう一定率で増加
推定IV-a	貯留係数 (有効間隙率)	全領域 6.0%	全領域 1.0%
推定IV-b			全領域 6.0%
推定IV-c			全領域 10.0%

以上のアルゴリズムにより、各モデルごとにABICを算定しその最小値を与えるモデルが最適な地下水解析モデル、その時の重みが最適な重みとなる。ここではハイパーパラメータとして事前分布の重み α^{-2} をベイズ流に考えるとの立場から(4)式をABICと呼ぶ。また、以下の数値シミュレーションでは(2)式右辺のシステム誤差分散 Q_{t-1} にのみ α^2 を乗ずることで、間接的に P_{t-1} を調整する。これは各種のモデルの違いがシステム誤差として事前分布に影響を与えるとの解釈に基づくもので、事前分布 P_{t-1} の重みを調整する機能としては同様の役割を果たす。

3. 数値シミュレーション 上記の手法により最適な地下水解析モデルがどのように選定されるかを調べるため、平面2次元解析を用いた数値シミュレーションを行った。地盤モデルは図-1に示すもので、要素分割、境界条件、想定した揚水試験の配置も示している。また、設定した真の透水性係数分布を図-2に示す。以下の推定に用いたデータは、真の透水性係数分布に基づき図-1の揚水試験を想定した順解析により求めた模擬地下水位データであり、観測誤差のモデル選定に利用した模擬観測データ以外は特に観測誤差は付加していない。表-1には検討したケースの一覧を示している。なお、システム誤差分散は文献3)中の表-3のシステム誤差分散Iを用いており、他の条件は文献3)と同様である。

3.1 観測誤差のモデル選定 地下水解析モデルの様々な条件をモデル選定する前に、観測値に含まれる観測誤差がどの程度かを推定する目的から、観測誤差を付加した模擬地下水位データを用いた。図-1の配置で得られる揚水試験時の模擬地下水位には、 $N(0.0, 4.0)$ の観測誤差(単位cm)を付加し、これを真値として表-1に示す5種類の観測誤差のモデルを準備した。ただし、簡単のため他の条件は真値に一致させている。各観測誤差モデルごとの係数 α とABICの関係を図-3に示す。これより真の観測誤差に一致する $N(0.0, 4.0)$ のモデル(推定I-c)が $\alpha=0.8$ において他のモデルよりもABICが最小になり、最適な観測誤差モデルとして選定される(図中矢印)。これは妥当な結果と言える。

3.2 初期水位、境界水位、貯留係数のモデル選定 初期水位、境界水位、貯留係数(有効間隙率)の設定を変えたモデルをそれぞれ3種類ずつ準備し、同様のモデル選定を行った。ただし、ここでは模擬観測地下水位データに観測誤差は付加していない。また、初期水位、境界水位、貯留係数の真値はそれぞれ0.0m, 0.0m, 6.0%である。これらのモデルに関して係数 α とABICの関係を図-4, 5, 6に示す。それぞれ真値に一致するモデル(推定II-b, 推定III-b, 推定IV-b)においてABICの最小値が得られ(図中矢印の範囲)、これらのモデル選定結果も妥当と言える。境界水位の設定の違いによる透水性係数の推定値の違いを図-7に示す。これらは推定III-aと推定III-bでそれぞれABICが最小となる $\alpha=10$ と $\alpha=0.01$ の場合であり、選定されたモデル(推定III-b)では真値(図-2)に近い推定値が得られている。

4. おわりに ここでは、拡張カルマンフィルタによる透水性係数の空間分布推定法にABICによるモデル選定を導入し、観測誤差のモデル化、ならびに地下水解析モデルの様々な条件のうち初期水位、境界水位、貯留係数をモデル化し、透水性係数の逐次同定と同時にこれらの最適なモデル選定を行った。その結果、ABICを導入した本手法の妥当性が確認された。なお、ABICの導出には漸近理論が用いられているため、真の分布と全く異なるモデル同士の比較は意味をなさない点に注意を要する。このため限られた情報から真の分布に比較的近いモデルを準備する必要がある、この意味から技術者の適切な判断が重要である。

謝辞 本研究に関して、岐阜大学工学部 本城勇助教教授に貴重ご意見を賜りました。ここに記して謝意を表します。

参考文献 1) Akaike, H., 'Likelihood and the Bayes procedure, Bayesian Statistic (ed. J. M. Bernardo et al.), Valencia University Press, pp.143~166, 1980.
2) 本城勇介: 地下水浸透流解析モデルのパラメーター推定: 最適モデルの選択, 第24回土質工学研究発表会, pp.1647~1650, 1989. 3) 奥野 哲夫・鈴木 誠・市川 康明: 複数の揚水試験結果を用いた透水性係数の空間分布推定と地下水流動の将来予測, 土木学会論文集, No.493 / III-27, pp.165~174, 1994. 4) 奥野 哲夫・鈴木 誠: ABICと拡張カルマンフィルタを用いた透水性係数の逐次同定とその結果の推移, 第31回地盤工学研究発表会, 1996.

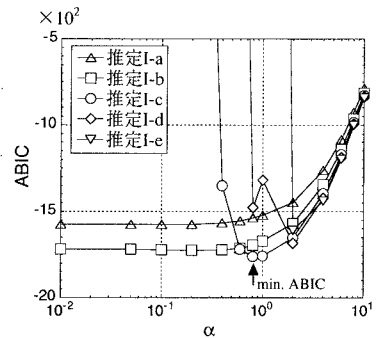


図-3 α とABICの関係(観測誤差モデル)

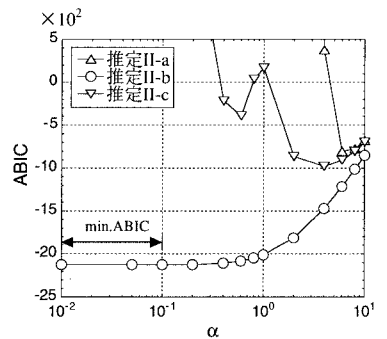


図-4 α とABICの関係(初期水位モデル)

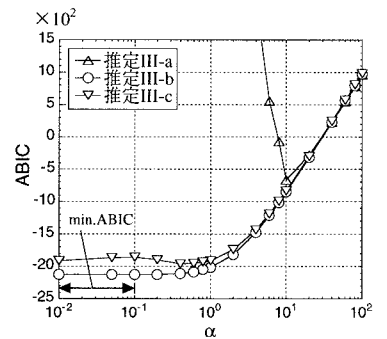


図-5 α とABICの関係(境界水位モデル)

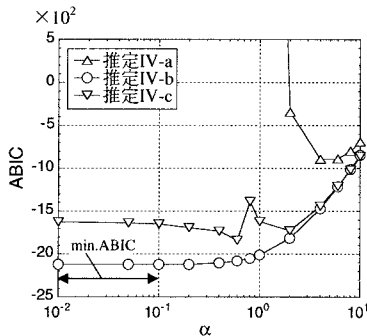


図-6 α とABICの関係(貯留係数モデル)

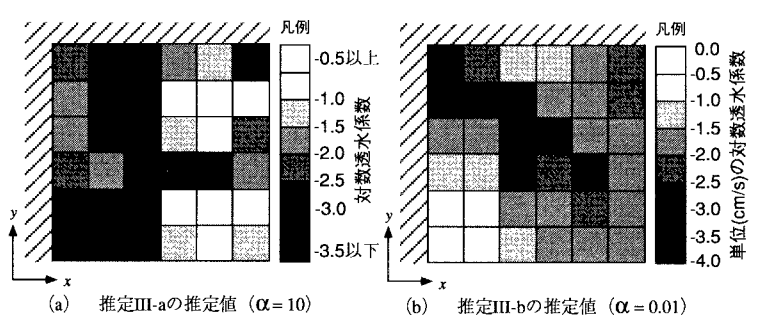


図-7 透水性係数の推定値