

CS-15

線形化逆解析手法による欠陥形状の再構成

東海大学 大学院 学生員 横井 浩司
東海大学 海洋学部 正 員 北原 道弘
岡山大学 環境理工学部 正 員 廣瀬 壮一

1. はじめに

超音波を利用して構造材料内部に存在する欠陥形状の再構成を行うことを目的とする。手法の要点は、欠陥による散乱波の積分表現にボルン近似とキルヒホフ近似を導入し、散乱体の形状を表す特性関数のフーリエ変換像と相似な散乱波の近似表現を導くことにより、散乱波の計測から散乱体形状を再構成することにある。キャビティとクラックからなる複合欠陥の再構成結果から、本手法の一特徴を示す。

2. 弾性波動場の積分表現と等価散乱源

図1に示すように、外部領域 D を占める均質な線形弾性体中のある部分に物体力 f_i が作用し、入射波 u_m^0 が D 内を伝播している場合、 D 内の任意点 y における全波動場 u_m の積分表現は次のように書ける。

$$u_m(y) = u_m^0(y) + \int_D G_{im}(x, y) f_i(x) dV \quad \dots (1)$$

ここで、 $G_{im}(x, y)$ は無限弾性体内のグリーン関数（基本解）である。上式において、積分は物体力が実際に作用している部分に関する積分となる。

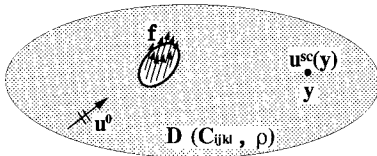


図1 入射波 u^0 と物体力 f

いま、領域 D 内に欠陥 D^c が存在する場合を考える（図2参照）。図2において、 u^0 は入射波、 S は欠陥の境界、 n は境界上の単位法線ベクトルである。このとき、領域 D 内の点 y における散乱波 $u_m^{sc}(= u_m - u_m^0)$ は次のように積分形で表現できる。

$$u_m^{sc}(y) = \int_D G_{im}(x, y) q_i(x) dV \quad \dots (2)$$

ここで、 $q_i(x)$ は散乱体（欠陥）を2次波源と見なしたときの等価な物体力に対応しており、等価散乱源と呼ぶ。図2に示した散乱問題に対しては、等価散乱源は次のように2通りに表現できる。

$$q_i(x) = \Gamma(x) \{ \delta \rho \omega^2 u_i(x) - \delta C_{ijkl} u_{k,l}(x) \partial / \partial x_j \} \quad (3)$$

$$q_i(x) = -\gamma(x) C_{ijkl} \{ n_j(x) u_{k,l}(x) - n_l(x) u_k(x) \partial / \partial x_j \} \quad \dots (4)$$

式(3)において、 Γ は散乱体 D^c の内部においてのみ値を有する次のような特性関数である。

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in D^c \\ 0 & \text{for } x \in D \setminus D^c \end{cases} \quad \dots (5)$$

また、 δC_{ijkl} は母材側と欠陥部分の弾性定数の差、 $\delta \rho$ は密度の差である。式(4)において、 γ は散乱体の境界 S 上においてだけ値を有する特異関数であり、次のように定義される。

$$\int_D \gamma dV = \int_S dS \quad \dots (6)$$

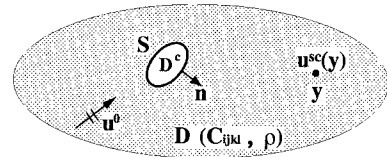


図2 入射波 u^0 と欠陥 D^c

3. 遠方散乱場

式(2)において、点 y は波動の観測点、点 x は散乱体上の点である。いま、散乱波動場を遠方で観測することになると、点 y と点 x の距離は次のように近似できる。

$$|y - x| = |y| - \hat{y} \cdot x \quad \dots (7)$$

ここで、 $\hat{y}$ は座標原点から観測点 y に向く単位ベクトルである。式(7)を式(2)に代入して、散乱場の遠方表現を得る。

$$u_m^{sc, far}(y) = \sqrt{2/(\pi k_L |y|)} e^{i(k_L |y| - \pi/4)} A_m(\hat{y}) + \sqrt{2/(\pi k_T |y|)} e^{i(k_T |y| - \pi/4)} B_m(\hat{y}) \quad \dots (8)$$

上式において、右辺第1項は縦波成分、第2項は横波成分を表している。また、 A_m と B_m はそれぞれ縦波と横波の散乱振幅であり、具体的には次のようになる。

$$A_m(\hat{y}) = \frac{i}{4\mu} k^2 \hat{y}_i \hat{y}_m \int_D q_i(x) e^{-ik_L \hat{y} \cdot x} dV \quad \dots (9)$$

$$B_m(\hat{y}) = \frac{i}{4\mu} (\delta_{im} - \hat{y}_i \hat{y}_m) \int_D q_i(x) e^{-ik_T \hat{y} \cdot x} dV \quad (10)$$

ここで、 $k = k_L/k_T$ とした。

4. 逆解析

欠陥への入射波は次のような平面縦波と仮定する。

$$u^0(x) = u^0 \hat{d}^0 e^{ik^0 \hat{p}^0 \cdot x} \quad \dots (11)$$

ここで、 u^0 は振幅、 $\hat{d}^0$ は変位の偏向方向を表す単位ベクトル、 k^0 は入射波の波数、 $\hat{p}^0$ は入射波の進行方向を表す単位ベクトルであり、ピッチ・キャッチ法に対応した縦波入射の場合、 $k^0 = k_L$ 、 $\hat{d}^0 = \hat{p}^0 = -\hat{y}$ となる。

遠方で観測する散乱波動場のうち縦波成分に着目すると、ここでの逆問題は、遠方で縦波の散乱振幅 $A_m(\hat{y})$ が与えられたとき、散乱体形状を決める問題となる。

4.1 ボルン逆解析

縦波の散乱振幅を表す式(9)において、等価散乱源 $q_i(x)$ は未知変位 u_i を含んでおり（式(3)と(4)参照）、与えられた散乱振幅に対して散乱体の幾何学量を表す Γ または γ について式(9)の積分方程式を解くことは一般には容易でない。

ここでは、式(9)の等価散乱源 $q_i(\mathbf{x})$ に含まれる変位 u_i にボルン近似を導入する。即ち、式(3)の変位場 u_i を式(11)の入射波 u_i^0 で置き換える。このとき、式(9)は次のようになる。

$$A_m(k_L, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{i u^0 \hat{y}_m k_L^2}{2} \int_D \Gamma(\mathbf{x}) e^{-2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} dV \quad (12)$$

上式右辺の体積積分は、 $\mathbf{K} = 2k_L \hat{\mathbf{y}}$ としたとき、特性関数 Γ の $\mathbf{K}$ -空間におけるフーリエ変換 $\Gamma(\mathbf{K})$ $|\mathbf{K}| = 2k_L$ と見ることができる。このとき、特性関数 $\Gamma(\mathbf{x})$ は逆フーリエ変換により次のように求められる。

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{x}) &= -\frac{2i}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\hat{y}_m}{u^0 k_L^2} A_m(k_L, \hat{\mathbf{y}}) e^{2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} k_L dk_L d\hat{\mathbf{y}} \\ &\dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

4.2 キルヒホフ逆解析

高周波数域における境界 S 上の波動波 u_j は、キルヒホフ近似を導入することにより次のように近似的に表現できる。

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{x}) &= \{-u^0 \hat{y}_j e^{-ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} \\ &+ \sum_{\alpha=L,T} R^\alpha(\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) u^0 \hat{d}_j^\alpha e^{ik_\alpha \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}}\} H(\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) \\ &\dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

上式の右辺第1項は入射波、第2項は反射縦波($\alpha = L$)と反射横波($\alpha = T$)である。また、 R^α は反射係数、 $H(\cdot)$ はHeaviside関数で境界 S のうち入射波が直接到達する側を選別している。

等価散乱源 q_i を式(4)として、式(14)を式(9)に代入すると、散乱振幅 A_m は次のようになる。

$$A_m(k_L, \hat{\mathbf{y}}) \propto \frac{-u^0 \hat{y}_m k_L}{2} \int_D \gamma_H(\mathbf{x}) e^{-2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} dV \quad (15)$$

ここに、 $\gamma_H(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) H(\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}))$ 、即ち、入射波が直接到達する境界部分のみで値をとる特異関数である。ボルン近似の場合と同様に $\mathbf{K} = 2k_L \hat{\mathbf{y}}$ とすると、上式の右辺は特異関数のフーリエ変換 $\hat{\gamma}_H$ と見なすことができる。よって、特異関数 γ_H は次のように逆フーリエ変換により再構成できる。

$$\begin{aligned} \gamma_H(\mathbf{x}) &= -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\hat{y}_m}{u^0 k_L} A_m(k_L, \hat{\mathbf{y}}) e^{2ik_L \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x}} k_L dk_L d\hat{\mathbf{y}} \\ &\dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

この $\gamma_H(\mathbf{x})$ は、散乱体境界のうちイルミネーション側を再現する。

5. 結果

図3に円形キャビティーとクラックからなる複合欠陥の再構成結果を示す。上側がボルン近似、下側がキルヒホフ近似に基づいた逆解析結果である。ボルン逆解析の結果はキャビティー部分の内部領域を、キルヒホフ逆解析の結果はキャビティーとクラック両方の境界を再構成していることがわかる。

図4は部分的に超音波を入射した場合であり、上側がキャビティーに対するボルン逆解析、下側が複合欠陥に対するキルヒホフ逆解析の結果である。どちらの

場合も超音波の入射方向のみが再現されている。なお、超音波の入射方向は中央の図の円弧の方向である。

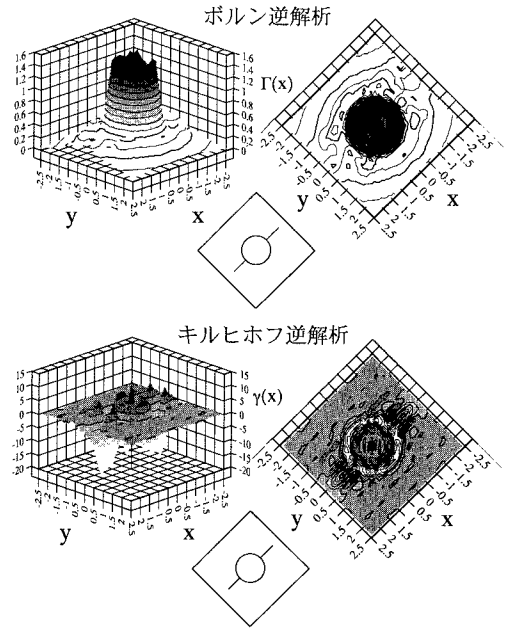


図3 複合欠陥の再構成

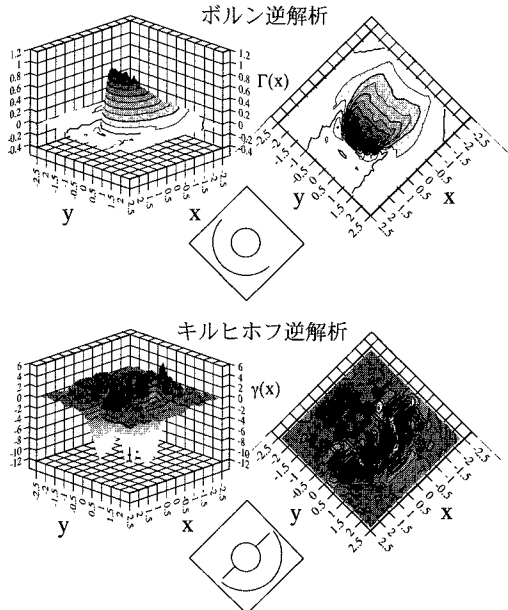


図4 部分散乱データによる複合欠陥の再構成

参考文献

Hirose, S.; Inverse scattering for flaw type classification, Inverse Problems in Engineering Mechanics, pp.359-366, Springer, 1993.