

CS-4 3次元動弾性積分方程式法による複雑なクラック形状の決定

京都大学工学部 正 西村直志
 青木建設 辻 浩樹
 京都大学工学部 正 小林昭一

1 序

超音波を用いた構造部材中の欠陥検出は今日広く用いられる非破壊評価法である。これを抽象化した数学的モデルである動弾性クラック決定問題は、従来、変分法による時間域超特異積分方程式の数値解法と組み合わせて解かれてきた [1]。この手法は形状関数の取り方の任意性が高いなど理論的には優れているものの、計算時間がかかり、これまでの解析ではクラック形状は円までしか扱えなかった。そこで、任意形状クラックを扱いうる手法として、既に選点法による解析 [2] が試みられている。本報ではさらに数値例を示すことにより、この手法の収束性やロバスト性を検討する。

2 定式化

今、簡単のため、無限の広がりを持つ三次元動弾性体内に単一の平面クラック S が存在していることがわかっているとす。さらに、部材接合部の界面クラックを想定し、クラックの存在する平面が既知であるとするが、その平面上のクラックの位置及び形状は未知であるとする。それらを決定すべく、波形が既知の複数の弾性波をクラックに入射し、得られる散乱波を幾つかの方向で時間計測する。考える問題は、こうして得られた実験データと最も良く適合するクラックを決定するものである。

この逆問題を解くために、まず対応する順問題、即ち、 S が既知の場合を考える。与えられた問題は、 S 上で表面力が 0 であり、 $(R^3 \setminus S) \times (t > 0)$ で動弾性学の微分方程式を満たす変位 u_i を求めるものである。その解は

$$u_a = u_{Ia} + \int_0^t \int_{S_y} n_k C_{jkn p} \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{ap} \varphi_j$$

で与えられる。ここに、 Γ_{ij} 、 C_{ijkl} 、 φ_j 、 u_{Ia} 、 n_k はそれぞれ動弾性学の基本解、弾性定数、開口変位、入射波、 S 上の単位法線ベクトルである。クラックの上での境界条件より、開口変位は次の積分方程式を解くことによって求められる。

$$0 = t_{Ia} + \int_0^t \int_{S_y} n_b n_k C_{ablm} C_{jkn p} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{mp} \varphi_j$$

ここに、 t_I は、入射波の表面力である。この超特異積分方程式を選点法によって離散化し、数値的に解くことによって開口変位を得ることができる。本報では形状関数として空間的に一定、時間方向に線形のものを用いる。平面クラックの場合、必要な積分は全て解析的に求めることが出来る。クラックから観測点が十分遠方にあるとき、最初に到達する散乱 P 波 $u_{SP} := u - u_I$ にはいわゆる遠方場近似を用いることが出来、 n 方向に x_3 軸をとると

$$u_{SP} \sim \frac{\text{const.}}{|x|} F(\hat{x}, t), \quad F(\hat{x}, t) = \int_{S_y} (\lambda \delta_{3j} + 2\mu \hat{x}_3 \hat{x}_j) \dot{\varphi}_j(\mathbf{y}, T + \hat{x} \cdot \mathbf{y}/c_L)$$

が導かれる。ここに、 $\hat{x} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 、 $T = t - |\mathbf{x}|/c_L$ であり、 c_L は P 波の波速である。

次に逆問題を考える。今、未知クラック S に既知の波形を有する N 個の弾性波 u_i^n を入射し、 M 個の観測方向 $\hat{x}^m$ で時刻 T^k に遠方場を測定し、得られた遠方場を $F_0^n(\hat{x}^m, T^k)$ とする。次に適当に仮定したクラック S から計算によって求めた遠方場を $F^n(\hat{x}^m, T^k; S)$ とおく。これらを用いてコス

ト関数 $J(S)$ を $J(S) = \frac{1}{2} \sum_{n,m,k} (F^n(\hat{x}^m, T^k; S) - F_0^n(\hat{x}^m, T^k))^2$ と定義する。求めるクラックは $J(S)$ を最小にするものとして決定される。数値解析を行なう際には、クラックの幾何情報を表す有限個の形状パラメータを導入し、 S を離散化する。すると、 J は形状パラメータの関数となり、非線形計画法によって最小化することが出来る。ここでは非線形計画法として準 Newton 法を用いるが、そのために必要となるコストの形状パラメータによる微分は全て解析的に求めた。なお、本報で使用した形状パラメータはクラックの縁を極座標表示して

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad r(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \{ \xi_3 + (\xi_{2n} \cos n\theta + \xi_{2n+1} \sin n\theta) \}$$

と書いたときの係数 ξ_i である。 n は有限で打ち切り、パラメータ数は5とした。

3 数値解析

入射する弾性波として、 $u_I = N(1 - \cos(c_L t - N \cdot \hat{x}))$ ($0 \leq c_L t - N \cdot \hat{x} \leq 2\pi$ のとき) それ以外は0と書けるような平面P波を3波用いた。ここに N は波の進行方向である。また、観測方向として、 $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ 、 $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ 、 $(0, \pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ の8方向を用いた。ポアソン比は1/4とした。図1には図中の初期仮定から正解位置への数値解の収束状況を示した。なお、遠方場の観測値としては、予め正解クラックを用いて数値解析によって求めた結果を用いた。図に示すように正解への収束が見られた。同様な結果は遠方場の計測値として正解に乱数による誤差を加えたものを用いた時にも得られた。実際、正解の20%程度の一様乱数を加えた解析では、ほとんど正解と変わりのない位置へ収束した。

参考文献

- [1] N. Nishimura, Modelling, Computation and Analysis in Fracture Mechanics, Kinokuniya, 1994.
- [2] 西村他、土木学会関西支部講演概要集、1996

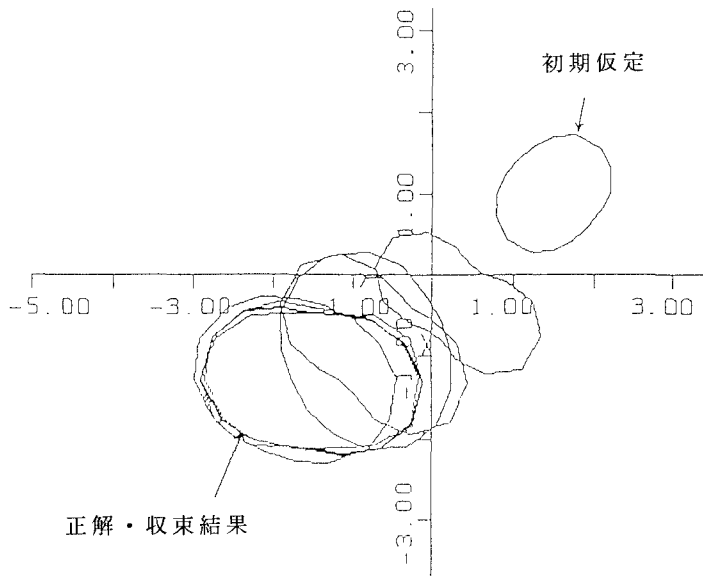


図1 収束状況