

CS-3

等価介在物法を用いた材料特性分布推定の逆解析

東京ガス 正 員 細川 直行
 東京大学 正 員 堀 宗朗

1. まえがき

不均一な構造に対し、内部の材料特性の分布を推定する問題は、さまざまな分野で関心を集めている。典型的な例として、岩盤工学でのゆるみ域や水ずみちの推定が挙げられる。順問題を「与えられた内部の材料特性から境界の物理量を求める」とすると、「境界の物理量から内部の材料特性を求める」ことが逆問題になる。材料特性が線形の場合、順問題は線形境界値問題となる。しかし、逆問題は材料特性に関して非線形となるため、不適切性が不明瞭となり、汎用的な逆解析の手法を提案することは容易ではない。この点を背景として、本研究では、マイクロメカニクスで確立された等価介在物法を適用し、材料特性分布推定の逆問題を不適切性が明らかな形で設定し、不適切性に対処する解析手法を提案する。

2. 材料特性分布推定の逆問題の設定

簡単のため2次元透水問題を例にして議論を進める。3次元や力学・電磁気学にも適用は可能である。 V を透水係数 $k_{ij}(\mathbf{x})$ を持つ不均一媒体とし、境界 ∂V で観測された圧力 $\bar{p}$ と流量 $\bar{v}$ から内部の k_{ij} を推定する。等価介在物法に基づき、圧力勾配 q_i と流速 v_i を結ぶダルシー則を以下のように書き換える。

$$v_i(\mathbf{x}) = k_{ij}(\mathbf{x})q_j(\mathbf{x}) = k_{ij}^0 q_j(\mathbf{x}) + v_i^*(\mathbf{x}) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 k_{ij}^0 は適当に導入された基準透水係数であり、 v_i^* は k_{ij}^0 と k_{ij} の差を補う付加的な流速で、アイゲン流速と呼ぶ(式(1)を v_i^* の定義とみてもよい)。 ∂V での圧力 p は、 $q_i = p_{,i}$ と $v_{i,i} = 0$ より、

$$\begin{aligned} k_{ij}^0 p_{,ij} + v_{i,i}^* &= 0 & \text{in } V \\ p = \bar{p} \text{ and } n_i v_i &= \bar{v} & \text{on } \partial V \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

という境界値問題を満たす。なお、 k_{ij}^0 の無限媒体のグリーン関数 g^0 を用いることで、線形方程式(2)を解くことが可能である。

式(1,2)を基に、 k_{ij} を推定する問題を次の2段階の逆問題として設定する。

1) 式(2)より $\bar{p}$ と $\bar{v}$ から v_i^* を推定

2) 式(1)より V の v_i^* から k_{ij} を推定

線形化された逆問題では、不適切性を明らかにすることが容易である。特に第1段階の逆問題では不連続性が問題となる。 v_i^* が作る圧力場は $\int g_i^0(\mathbf{x} - \mathbf{y})v_j^* dS_{\mathbf{y}}$ となるため、 $g^0(\mathbf{x}) \propto \ln|\mathbf{x}|$ より、内部の v_i^* の影響が ∂V では観測されにくいことがわかる。さらに、 $\int g_i^0(\mathbf{x} - \mathbf{y})v_j^* dS_{\mathbf{y}}$ を離散化して、観測された圧力とアイゲン流速の間のマトリクスを考えると、観測点同士が近い場合にマトリクスのランクが下がることもわかる。このマトリクスは、観測点 $\mathbf{x} + n\mathbf{a}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の観測値 $(\bar{p})_n = \bar{p}(\mathbf{x} + n\mathbf{a})$ と、内部の点 $\mathbf{y}^{(m)}$ で離散化された $(v^*)_m = v_i^*(\mathbf{y}^{(m)})dS$ を結びつけるもので、 g^0 を $\mathbf{x}$ でテイラー展開すると、 (n, m) 成分は $(g_{,i}^0 + n(g_{,ij}^0 a_j) + \dots)(v^*)_m$ であり、高次項を無視するとランクが2である。つまり、仮に ∂V で十分な数の観測が可能でも、マトリクスのランクは変わらず、観測の数を増やすことに意味が無いことを意味する。したがって、表面での計測の限界を的確に表している。

3. 等価介在物法による逆解析

設定された2つの逆問題は線形であるが、第1の逆問題は不適切となっている。この不適切性に対処するために、表面で計測されたデータを内部データに変換して逆解析を行う。 ∂V で $\bar{p}$ と $\bar{v}$ が観測されているので、 $\bar{p}$ のみを境界条件とする境界値問題1と、 $\bar{v}$ のみを境界条件とする境界値問題2を設定する。重ね合わせの原理により、 $v_i^* = 0$ と $p = \bar{p}$ または $n_i v_i = \bar{v}$ から決まる p^{ah} と、 v_i^* と $p = 0$ または $n_i v_i = 0$ から決

まる $p^{\alpha d}$ の和として、境界値問題 α の圧力場 p^{α} が与えられる。したがって、適当に q_i と v_i^* を離散化すると、圧力勾配は $[q^{\alpha}] = [q^{\alpha h}] + [\Gamma^{\alpha}][v^*]$ となる。ここで、 $[\Gamma^{\alpha}][v^*]$ は境界値問題 α のグリーン関数から決定される。 $[q^1] = [q^2]$ であるから、

$$[\Gamma^1 - \Gamma^2][v^*] = [q^{2h}] - [q^{1h}] \dots\dots\dots (3)$$

を得る。 ∂V の $\bar{p}$ と $\bar{v}$ は内部の $[q^{\alpha h}]$ に変換されており、 v_i^* を比較的近くの $[q^{2h}] - [q^{1h}]$ から決定することができる。 $[v^*]$ が式 (3) から決定されると、式 (1) を離散化して

$$[k]([q^{\alpha h}] + [\Gamma^{\alpha}][v^*]) = [k^0]([q^{\alpha h}] + [\Gamma^{\alpha}][v^*]) + [v^*] \dots\dots\dots (4)$$

が得られる。複数の境界条件の組 $(\bar{p}, \bar{v})$ から $[q^{\alpha h}]$ と $[v^*]$ が求まると、 $[k]$ を推定することができる。

4. 解析例

提案された逆問題の設定と解析手法を簡単な例題に適用し、有効性を検討する。 V を図 1 に示す 3×3 の正方形からなる媒体とし、中段の 3 要素に高透水領域をおく。解析に用いた基準透水係数は $k_{11}^0 = -1$ 、 $k_{22}^0 = -2$ 、 $k_{12}^0 = 0$ である。境界 ∂V の 12 の節点の圧力と流量から透水係数の分布を推定する。なお、式 (3) では、あくまでも表面データの内部データへの変換であるから、計測データが少ない場合には、解の唯一性を回避することはできない。この結果、マトリクス $[\Gamma^1 - \Gamma^2]$ は 0 固有値を持つことになる。固有値 0 の固有ベクトルに対応する $[v^*]$ は決定されない。逆に言えば、計測データから決定することができないアイゲン流速のモードが存在する。式 (3) より、固有値が 0 でない固有ベクトルから決定されるアイゲン流速が一意的に決定される。決定されたアイゲン流速を図 2 に示す。このアイゲン流速がつくる場は境界での圧力と流量の観測値を満たす。なお、解析されたアイゲン流速が作る流速場を表示すると、図 3 のようになる。正解の流速場とほぼ一致しており、表面の計測データから推定できないアイゲン流速場があるものの、内部の流速については比較的精度良く推定されるようである。

式 (4) を用いて式 (3) で決定できないアイゲン流速と透水係数を逆解析する。なお、3 種類の境界条件を組み合わせることで条件の数を増やした。アイゲン流速と透水係数に関して式 (4) は複線形となる。したがって、線形逆問題が非線形となるため、固有値 0 の固有ベクトルに対応するアイゲン流速を $[0]$ とした初期値を用いてニュートン法による収束計算によってこの非線形逆問題を解いた。得られた透水係数の分布を図 4 に示す。収束計算の結果は正解に近いとはいえず、初期値よりもむしろ離れたところにある。これは収束計算の手法として用いたニュートン法がこの場合、適当ではなかったためであると考えられる。

5. まとめ

本研究では等価存在物法による定式化で逆問題の持つ不適切性を明らかにし、その不適切性に対処する手法を提案した。しかしながら逆問題には表面の計測では決定できない成分が存在する。これを決定するには物体内部で新たな計測を行うことが必要と考えられる。なお、新たな計測は式 (3) の $[p_i^{2h}] - [p_i^{1h}]$ の小さいところで行えば良いと考えられる。

参考文献

- 1) 山口栄輝、堀宗朗、細川直行：岩盤浸透流問題の逆解析の新しい定式化とベイズ推定の適用、構造工学論文集 Vol.40A pp.445-450、1994。

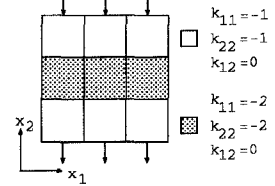


図 1 解析に用いたモデル

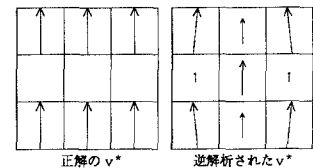


図 2 アイゲン流速の逆解析結果

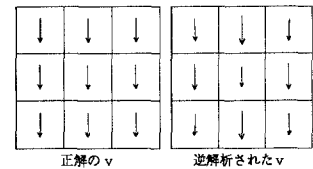


図 3 流速の逆解析結果

収束計算の初期値				収束計算の結果			
k11	-1.076	-1.289	-1.110	-0.886	-0.671	-0.925	
k12	-0.023	-0.017	0.008	-0.049	0.083	0.123	
k22	-0.945	-1.350	-0.962	-0.971	-0.653	-1.035	
k11	-1.804	-1.279	-1.804	-1.299	-197.1	-1.299	
k12	0.063	-0.029	0.063	-0.037	-180.8	-0.037	
k22	-1.793	-1.035	-1.793	-2.722	-192.8	-2.722	
k11	-1.110	-1.289	-1.076	-0.925	-0.671	-0.886	
k12	0.008	-0.017	-0.023	0.123	0.083	-0.049	
k22	-0.962	-1.350	-0.945	-1.035	-0.653	-0.971	

図 4 透水係数の逆解析結果