

CS-1

弾性体の解析による未知パラメータの同定

 ○ 中央大学 学生員 玄順 貴史
 中央大学 正員 川原 陸人

1 はじめに

我々は、基礎を築いたり、トンネルを施工するために地盤を掘削する。しかしながら、掘削の際に生じる地盤の変形に伴う近接構造物への影響は避けて通れない問題であり、これらの事前解析は施工時の安全性にとって必要なことである。そこで地盤の変形を予測する手段として、有限要素法が用いられているが、この解析の精度は、入力物性値の正確さに大きく影響される。しかし、実際の地盤における正確な物性値を得ることは困難である。ここから実際に観測される変位から物性値を求める、逆解析が用いられるようになった。そこで本研究では、地盤の力学的挙動における近接構造物への影響を考えるうえで、掘削に伴う地盤の変形から線形弾性解析における逆解析の一手法を確立し、その数値解析例を示し、また実際のデータとの比較検討を行う。

2 基礎方程式

基礎方程式を導くにあたり、微小変形であると仮定する。すると弾性体の解析を行なうためには、以下の3つの方程式が必要である。

(1) 運動学的方程式（歪み-変位方程式）

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } V \quad (1)$$

(2) 運動量保存の法則（応力の釣合方程式）

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0 \quad (2)$$

(3) 構成方程式（応力-歪み方程式）

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{in } V \quad (3)$$

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

式(1),(2),(3)より

$$\int_V E_{ijkl} \varepsilon_{k,l} \varepsilon_{i,j} dV = \int_S P_i u_i dS + \int_V \rho f_i u_i dV \quad (7)$$

ここに u_i は変位、 ε_{ij} は歪み、 σ_{ij} は応力、 E_{ijkl} はヤング係数、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 ρ は土の密度である。

3 境界条件

境界 S_1 で変位 $\{u\}$ が与えられ、境界 S_2 で表面力 $\hat{P}_i$ が与えられたとする。すると境界条件は、次のようになる。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } S_1 \quad (8)$$

$$P_i = \sigma_{ij} n_j = \hat{P}_i \quad \text{on } S_2 \quad (9)$$

4 有限要素方程式

式(7)を重みつき残差方程式に変形し、三角形一次の内挿関数を仮定し、ガレルキン法を適用して、有限要素方程式を導くと以下ようになる。

$$K_{\alpha i \beta k} u_{\beta k} = \Omega_{\alpha i} \quad (10)$$

$$K_{\alpha i \beta k} = \int_V (\Phi_{\alpha,j} E_{ijkl} \Phi_{\beta,l}) dV \quad (11)$$

$$\Omega_{\alpha i} = \int_{S_2} (\Phi_{\alpha} \hat{P}_i) dS + \int_V (\Phi_{\alpha} \rho f_i) dV \quad (12)$$

$$\sigma_{i,j} = E_{ijkl} \Phi_{\beta,l} u_{\beta k} \quad (13)$$

5 掘削時の地盤解析

線形弾性解析を用いての掘削時の解析の方法としてひずみを重ね合わせて変形状態を求める方法を用いた。自重および荷重等による原地盤の解析を行い、変位 $\{u_2\}$ 、応力 $\{\sigma_1\}$ を求める（図5-1）。掘削予定面上の応力を解放するため、初期応力に相当する逆符号の節点力を求め、これを外力として作用させて（掘削面での応力解放）解析を行い、変位 $\{u_2\}$ を求める（図5-2）。（図5-1）および（図5-2）のそれぞれの変位を重ね合わせると掘削時の変位 $\{u\}$ を求めることができる（図5-3）。

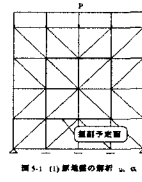


図 5-1 (1) 原地盤の解析

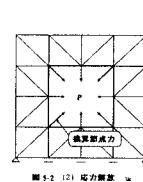


図 5-2 (2) 応力解放

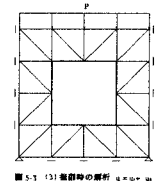


図 5-3 (3) 掘削時の解析

6 パラメータ E の同定

6.1 評価関数

同定問題は出力の差を用いた最小化問題であり、この手法は間接手法と言われている。共役勾配法は一種の最小二乗法であり、よって評価関数は、変位の計算値と観測値の残差の二乗の合計によって表される。

$$J = \frac{1}{2} (\{u\} - \{u^*\})^T (\{u\} - \{u^*\}) \quad (14)$$

ここで、 $\{u\}$ は変位の計算値、 $\{u^*\}$ は変位の観測値である。また、式(14)を最小とするような $\{u\}$ を求めるがその $\{u\}$ が式(10)を満たしていなければならない。そこで共役勾配法を用いる。

6.2 共役勾配法

共役勾配法は計算時間が長くなることがあるが、アルゴリズムが簡明であるという利点がある。そこで今回は共役勾配法を用いた。評価関数 J を最小にするパラメータ E は繰り返し計算によって求められる。パラメータ E を求めるための評価関数の勾配は次の式で求められる。

$$\{d\} = -\left[\frac{\partial J}{\partial E}\right] = -\left[\frac{\partial u}{\partial E}\right] (\{u\} - \{u^*\}) \quad (15)$$

ここで $\left[\frac{\partial u}{\partial E}\right]$ は感度行列であり、式 (10) をパラメータ E で偏微分することにより求められる。関数 $J(\{E\}^{(i)} + \alpha^{(i)}\{d\}^{(i)})$ はスカラー量 α で最小になる。この状態はステップ幅 α によって導かれる。評価関数 J をテラー展開することで次の式が得られる。

$$\begin{aligned} J(\{E\}^{(i)} + \alpha^{(i)}\{d\}^{(i)}) &= J + \alpha \left[\frac{\partial J}{\partial E} \right]^T \{d\} \\ &= \frac{1}{2} (\{u\} + \alpha \left[\frac{\partial u}{\partial E} \right] \{d\} - \{u^*\})^T \\ &\quad (\{u\} + \alpha \left[\frac{\partial u}{\partial E} \right] \{d\} - \{u^*\}) \end{aligned} \quad (16)$$

式 (16) を最小にするステップ幅 α は $J(\{E\}^{(i)} + \alpha^{(i)}\{d\}^{(i)})$ を α で偏微分し、その結果を $= 0$ としたものから求められる。

$$\alpha = -\frac{\{d\}^T \left[\frac{\partial J}{\partial E} \right]}{\{d\}^T \left[\frac{\partial u}{\partial E} \right]^T \left[\frac{\partial u}{\partial E} \right] \{d\}} \quad (17)$$

式 (16), (17) の手順をふむことにより E の同定ができる。パラメータ E はそれぞれ式 (15), (17) を用いて $\{d\}$ と α を求め更新する。新しいパラメータ $\{E^{(i+1)}\}$ は次のように表される。

$$\{E\}^{(i+1)} = \{E\}^{(i)} + \alpha^{(i)}\{d\}^{(i)} \quad (18)$$

ここで (i) は繰り返し番号である。勾配は共役勾配法を用いて計算され、次の式で更新される。

$$\beta = \frac{(\left[\frac{\partial J}{\partial E}\right]^{(i+1)}, \left[\frac{\partial J}{\partial E}\right]^{(i+1)})}{(\left[\frac{\partial J}{\partial E}\right]^{(i)}, \left[\frac{\partial J}{\partial E}\right]^{(i)})} \quad (19)$$

$$\{d\}^{(i+1)} = -\left[\frac{\partial J}{\partial E}\right]^{(i+1)} + \beta \{d\}^{(i)} \quad (20)$$

式 (20) によって計算された勾配は次のステップに用いられる。

7 数値解析例

今回の研究では、掘削における地盤の挙動を解析するにあたりテストモデルとして図1で行った。ポアソン比およびヤング係数の各物性値は、それぞれ $\nu = 0.30, E = 2100[t/m^2]$ とした。図2は手法の中で述べた自重および荷重等によって変形した地盤を表していて図5-1にあたるものである。図3は図5-2にあたるもので換算節点力に逆符号を付けたものを外力として作用させた際の地盤の変形である。つまり、掘削予定面上の初期応力を解放した際の地盤の変形である。最後に、図1と図2で得られた変位を重ね合わせたものが、線形弾性解析における掘削時の地盤の挙動を示したものである図3(5-3)。次にヤング係数の同定であるが、同定することにより得られたヤング係数の値を図4に示し、その時の評価関数の値は、図5に示したとおりである。

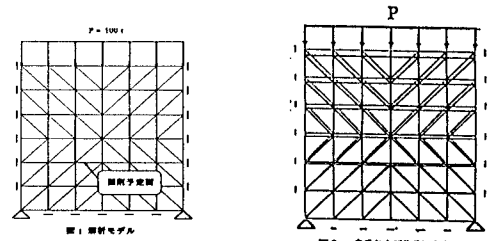


図1 掘削モデル

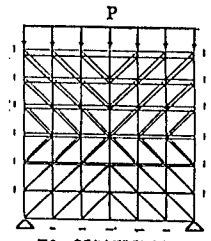


図2 自重および荷重による地盤の変形

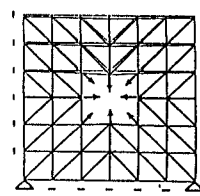


図3 応力を解放した際の地盤の変形

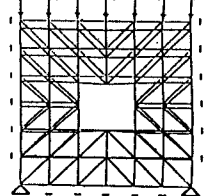
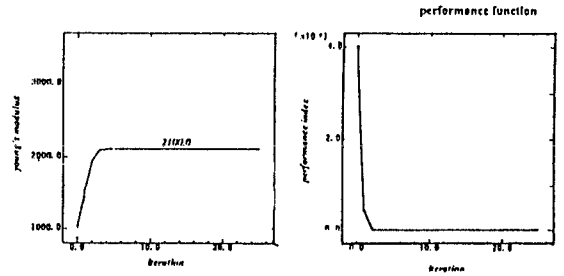


図4 掘削時の地盤の変形



8 おわりに

本研究は、掘削時の地盤の変形に伴う近接構造物への影響を考えるうえで、地盤の変形の予測段階においてより正確な物性値を得ることが必要となり、変位からヤング係数を同定する逆解析の一手法を確立させた。今回は、トンネルを施工する際に、近接した既存のトンネルにだけの影響があるかを調べるうえで、トンネルの変位から地盤のヤング係数を同定し、地盤の変形を考えてみた。これからこの種の同定問題は構造物の施工時の安全性にとっておおいに役立ってゆくのではないだろうか。また、構造物の施工中に現場で観測された変位からヤング係数等を求めることで、得られた結果から今後の地盤の変形の予測や、その都度、状況にあった施工を行うことを可能とするのではないであろうか。

参考文献

- [1] 川原 睦人、新体系土木工学・有限要素法、技報堂出版
- [2] 嘉納 秀明、システムの最適理論と最適化、コロナ社