

勾配型非局所理論を用いたコンクリートの ひずみの局所化解析

武蔵工業大学 学生員 山川和弘
武蔵工業大学 正会員 吉川弘道

1. はじめに

コンクリート材料などの準脆性材料は、最大強度以降の塑性変形過程において、ひずみが局所化することが知られている。不安定状態や寸法効果を誘発するひずみの局所化問題は、破壊力学の応用やエネルギー原理の適用などの多くの研究が行われている。

本研究は勾配型非局所理論を用い、ひずみの局所化について解析的検討を行ったものである。

2. 勾配型非局所モデルの定式化

(1) 並列モデル

局所ひずみ ϵ によって表される弾性部分と非局所ひずみ ϵ^* による塑性部分を含む並列モデルを考え、各々の構成則を次式のように定義する。

$$\dot{\sigma} = E_e \dot{\epsilon}, \quad \dot{\sigma}_p = H_p \dot{\epsilon}^* \quad \dots \dots \dots (1)$$

ただし、 E_e ：弾性係数、 H_p ：塑性係数とする。合算された応力 $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_e + \dot{\sigma}_p$ は弾塑性係数 $E_{ep} = E_e + H_p$ を用いて次式のように変形できる。

$$\dot{\sigma} = E_e \dot{\epsilon} - (E_e - E_{ep}) \dot{\epsilon}^* \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここで、二次勾配を含む勾配型非局所ひずみ ϵ^* としてBazant¹⁾の提案する次式を用いる。

$$\epsilon^* = \left(1 + \lambda^2 \nabla^2\right) \epsilon = \left(1 + \lambda^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \epsilon \quad \dots \dots \dots (3)$$

(ただし、 $\lambda^2 = k_0 l_c^2$ 、 $k_0 = \frac{1}{24}$ 、 l_c ：特性長さ)

式(3),(2)より、最終的に次式の材料構成則を得る。

$$\dot{\sigma} = E_{ep} \dot{\epsilon} - (E_e - E_{ep}) \lambda^2 \frac{d^2 \dot{\epsilon}}{dx^2} \quad \dots \dots \dots (4)$$

(2) Bazant による解析解の導入¹⁾

図-1のような両端をバネ（バネ剛性 C ）で拘束した長さ L の単軸部材を考え、材料構成則が式(4)によって表されるものとする。局所化領域幅 w 、軸上の位置 x の原点を局所化領域幅の中心にとる。ここでは、軟化後 E_{ep} を一定と仮定する。

軸上の変位を $\dot{u}(x)$ とすると、ひずみは $\dot{\epsilon}(x) = \dot{u}'(x)$ として与えられるので、式(4)に代入すると次式のような非局所構成則となる。

$$\dot{\sigma} = E_{ep} \dot{u}'(x) - (E_e - E_{ep}) \lambda^2 \dot{u}'''(x) \quad \dots \dots \dots (5)$$

式(5)は、変位 $\dot{u}(x)$ に関して、非斉次の3階線形微分方程式となり、その解は次式ようになる。

$$\dot{u}(x) = \left(\frac{1}{E_{ep}} x + A \sin \mu x\right) \dot{\sigma}, \quad (A: \text{任意定数}) \quad (6)$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{E_e}{E_{ep}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{1+k}}, \quad \left(k = -\frac{E_{ep}}{E_e}\right) \quad (7)$$

局所化領域幅 w の端部座標 $x=w/2$ についての境界条件および適合条件として、次式のように表される。

$$\text{境界条件: } \begin{cases} \dot{\epsilon}^* \left(\frac{w}{2}\right) = 0 \\ \dot{u}' \left(\frac{w}{2}\right) + \lambda^2 \dot{u}''' \left(\frac{w}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \dots \dots (8)$$

$$\text{適合条件: } \dot{u} \left(\frac{w}{2}\right) + \left[\frac{L-w}{2E_e} + \frac{1}{C}\right] \dot{\sigma} = 0 \quad \dots \dots (9)$$

以上の関係より、最終的に Ω と k についての局所化特性方程式が得られる。

$$\tan\left(\frac{\mu L}{2}\Omega\right) + \frac{\mu L}{2} \left[\left(1 + \frac{2E_e}{CL}\right) \frac{k}{1+k} - \Omega\right] = 0 \quad (10)$$

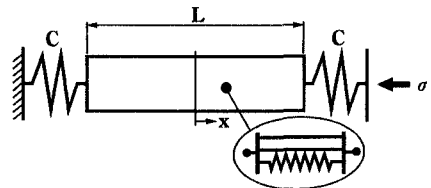


図-1：バネ拘束された並列モデル

3. 準局所化状態の等価構成則²⁾

圧縮応力 σ を受ける部材長 L の単軸部材を考え、応力ピーク以降に塑性ひずみがある領域に集中する局所化状態を考える。軟化状態（ひずみが進行する状態）を ΩL で表し、残りを弾性除荷状態 $(1-\Omega)L$ とする（図-2）。 Ω は塑性軟化領域の長さを表す割合で局所化領域比として $(0 < \Omega < 1)$ で表し、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}(x)$ は次式のように表す（ただし、添字 t は塑性軟化状態、 u は弾性除荷状態を示す）。

$$\dot{\epsilon}(x) = \begin{cases} \dot{\epsilon}_t & (x : \Omega L) \\ \dot{\epsilon}_u & (x : (1-\Omega)L) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (11)$$

各々の領域について、次のような構成則を定義する。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E_{ep} \dot{\epsilon}_t & E_{ep} &= E_{ep}(\epsilon_t) & \text{塑性軟化領域} \\ \dot{\sigma} &= E_e \dot{\epsilon}_u & E_e &= \text{一定} & \text{弾性除荷領域} \end{aligned} \quad \dots (12)$$

ここで、平均化したひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ave}$ を導入すると、最終的には次式を得る。

$$\dot{\epsilon}_{ave} = \Omega \dot{\epsilon}_t + (1 - \Omega) \dot{\epsilon}_u \quad (\dot{u} \cong \dot{\epsilon}_{ave} L) \cdots (13)$$

以上より、応力速度： $\dot{\sigma} \sim$ 平均化したひずみ速度： $\dot{\epsilon}_{ave}$ の構成則として次式を得る。

$$\dot{\sigma} = E^* \dot{\epsilon}_{ave}, \quad E^* = \frac{E_{ep}}{(1+k)\Omega - k} \cdots (14)$$

E^* ：等価剛性値（塑性軟化領域と弾性除荷領域が混在する局所化した部材の等価な弾性係数の剛性）

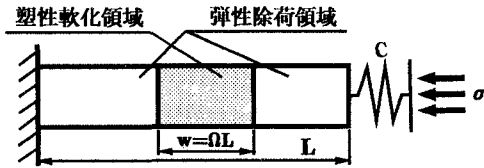


図-2：局所化状態図

4. 数値シミュレーションによる考察

図-3は、式(10)による Ω に関する数値解析結果を示したもので、パラメータ(ℓ_c/L 、 E_e/C 、 L)は、材質の特性長さ ℓ_c/L 、部材長 L 、境界状態 E_e/C を表す。なお、 $0 < \Omega < 1$ の範囲に複数の解が存在する場合、最小となるものを用いた。

局所化領域比～剛性比関係： ℓ_c/L が小さい程、 L が小さい程、 E_e/C が大きい程、局所化領域の分岐が早くなり、剛性比の進展に対する局所化領域の低下する割合が大きい。

次にPopovicsの提案式を基本構成則とした数値シミュレーションを行い、これらを図-4に示した。

荷重～変位関係： ℓ_c/L が小さい程、 L が小さい程、 E_e/C が大きい程、 Ω が小さくなり、応力ピーク以降より急激な軟化挙動を呈する。

5. まとめ

数値シミュレーションより、局所化領域の大きさは材質の特性長さ、部材長、境界条件に依存して変化することが分かる。勾配型非局所理論は、localization limiterとしての機能のみならず、局所化領域の大きさを与える有効な方策である。

参考文献

- 1) Bazant, Z. P.: *Stability of Structures, - Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theory -*, Oxford University Press, 1991
- 2) 吉川弘道, 西岡真帆: ひずみの局所化領域を有するコンクリート単軸部材の変形挙動と安定/不安定条件, コンクリート工学論文集, pp.89-101, Vol.6, No.1, 1995

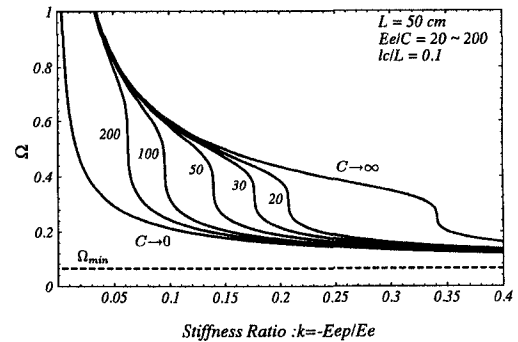
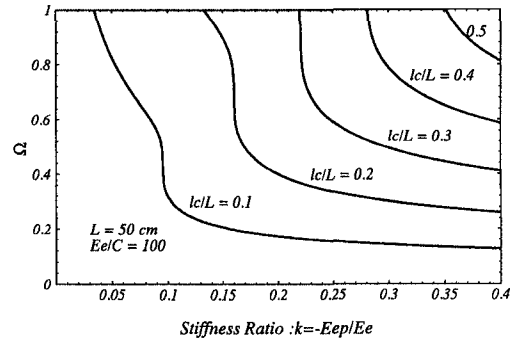


図-3：局所化領域比～剛性比関係

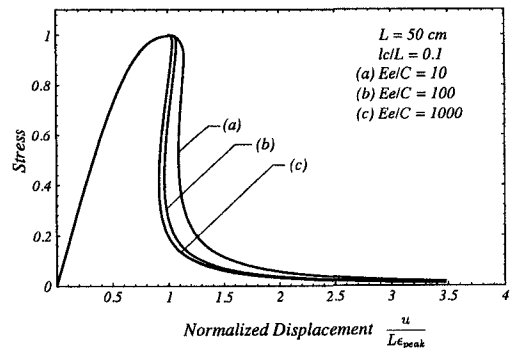
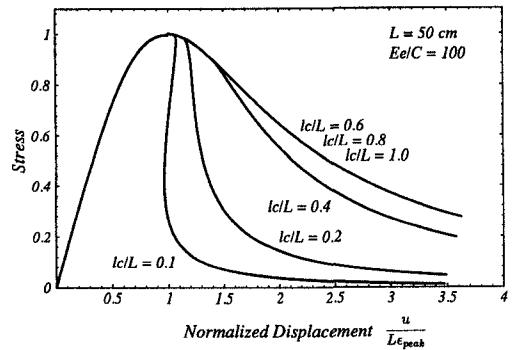


図-4：応力～変位曲線