

III-B 406

予測制御法による地中温度制御

中央大学 学生会員 山本 典行
中央大学 正会員 川原 睦人

1 はじめに

近年、世界各国で環境問題が重要視されてきている。日本でも、ゴルフ場での過度の農薬使用が深刻な問題となっていて、周辺の河川や地下水に影響を及ぼし、環境汚染に直接つながっている。そこで、我々は制御システムの構築を考えた。そのシステムとは、地中にパイプを埋め、外気温によってパイプ内に流す水の温度を調整して、地中の温度を制御するというものである。これによって、農薬を使用しないで、青々とした芝生を維持しようというのである。これを実際に行うために、最適制御理論を用いた数値解析がしばしば行われている。これまでに、共役勾配法と Sakawa-Shindo 法による最適制御を扱ったが、これらの制御法は実際に適用するには問題がある。それは、地表面の未来の温度は、現実には知ることができないという点である。これを克服するために、本研究では、予測制御法を用いた数値解析を行っている。

2 基礎方程式

モデルの温度の計算値 $\{\theta\}$ を得るために、次に示すような非定常熱伝導方程式を適用する。

$$\rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

ここで、 x は横方向の距離、 y 縦方向の距離、 t は時間、 ρC_p は密度×比熱、 β は熱伝導率、 θ は温度を表す。ただし、内部発熱量がないため、右辺の外力項は0としてある。

基礎方程式は、次に示される初期条件と境界条件の下で解かれる。

- 第一種境界条件（デリクレ境界条件）

$$\theta = \hat{\theta} \quad \text{on } S_1 \quad (2)$$

- 第二種境界条件（ノイマン境界条件）

$$q = \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} l + \frac{\partial \theta}{\partial y} m \right) = \hat{q} \quad \text{on } S_2 \quad (3)$$

- 初期条件

$$\theta_0 = \hat{\theta}_0 \quad \text{in } V \quad (4)$$

3 有限要素法

有限要素法によって、基礎方程式を空間方向に離散化すると、次に示す有限要素方程式が得られる。

$$[M]\{\dot{\theta}\} + [S]\{\theta\} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

ここで、 $[M]$ は質量行列、 $[S]$ は剛性行列を表している。

そして、クランク・ニコルソン法によって、有限要素方程式を時間方向に離散化すると、次の式が得られる。

$$([M] + \frac{\Delta t}{2}[S])\{\theta\}^{n+1} = ([M] - \frac{\Delta t}{2}[S])\{\theta\}^n \quad (6)$$

ここで、 Δt は微小時間、 n は時間ステップを表す。次に、制御問題を解くために、次に示される状態方程式を作成しておく必要がある。

$$\begin{aligned} \{\theta\}^{n+1} &= ([M] + \frac{\Delta t}{2}[S])^{-1}([M] - \frac{\Delta t}{2}[S])\{\theta\}^n \\ &= [A]\{\theta\}^n + [B]\{u\}^n + [C]\{f\}^n \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[C]$ は、 $([M] + \frac{\Delta t}{2}[S])^{-1}([M] - \frac{\Delta t}{2}[S])$ より抜き出した行列である。また、 θ は状態量ベクトル、 u は操作量ベクトル、 f は外力量ベクトルを表している。

4 予測制御法

最適制御理論を適用する場合には、二点境界値問題をとくために、制御対象時間内でのすべての外力が、予め必要となることが条件となっている。しかし、現実的な制御問題について考えてみると、すべての外気温の状況が予め既知であることは難しいと思われる。

それに対して、常にある時間分だけ事前に外気温の情報が得られる場合に、その情報を利用して、パイプ内の水の温度を決定する制御手法が考えられる。例えば、天気予報等の情報によって、地表面の温度が、常に10分先までの情報が正確に分かるような場合、その情報をもとに、地盤内の温度の変動を数値的に予測することによって、パイプ内の水の温度を決定するような制御手法である。それを、予測制御法という。この制御手法の利点として、境界条件の情報を得ながら、随時、操作量を決定していくことが可能であるという点である。

4.1 評価関数

予測制御法により制御問題を取り扱うために、評価関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left((\{\hat{\theta}\}^{n+i} - \{\theta^*\})^T [Q] (\{\hat{\theta}\}^{n+i} - \{\theta^*\}) \right. \\ &\quad \left. + (\{u\}^{n+i-1} - \{u^*\})^T [R] (\{u\}^{n+i-1} - \{u^*\}) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\{\hat{\theta}\}$ 、 $\{\theta^*\}$ は、目的点での予測状態量の計算値と状態量の設定値をそれぞれ表しており、 $\{u\}$ 、 $\{u^*\}$ は、操作点での操作量と操作量の理想値を表している。 Q 、 R は重み関数である。

4.2 予測状態量

予測状態量 $\{\tilde{\theta}\}$ を得るために、予測状態方程式を以下のように定義する。

$$\{\tilde{\theta}\}^{n+1} = [A]\{\theta\}^n + [B]\{u\}^n + [C]\{f\}^n \quad (9)$$

そして、この式から以下の式も得られる。

$$\begin{aligned} \{\tilde{\theta}\}^{n+2} &= [A]\{\tilde{\theta}\}^{n+1} + [B]\{u\}^{n+1} + [C]\{f\}^{n+1} \\ &= [A]^2\{\theta\}^n + [A][B]\{u\}^n + [B]\{u\}^{n+1} \\ &\quad + [A][C]\{f\}^n + [C]\{f\}^{n+1} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{\theta}\}^{n+3} &= [A]\{\tilde{\theta}\}^{n+2} + [B]\{u\}^{n+2} + [C]\{f\}^{n+2} \\ &= [A]^3\{\theta\}^n + [A]^2[B]\{u\}^n + [A][B]\{u\}^{n+1} \\ &\quad + [B]\{u\}^{n+2} + [A]^2[C]\{f\}^n \\ &\quad + [A][C]\{f\}^{n+1} + [C]\{f\}^{n+2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{\theta}\}^{n+m} &= [A]\{\tilde{\theta}\}^{n+m-1} + [B]\{u\}^{n+m-1} \\ &\quad + [C]\{f\}^{n+m-1} \\ &= [A]^m\{\theta\}^n + [A]^{m-1}[B]\{u\}^n \\ &\quad + \cdots + [B]\{u\}^{n+m-1} \\ &\quad + [A]^{m-1}[C]\{f\}^n \\ &\quad + \cdots + [C]\{f\}^{n+m-1} \end{aligned} \quad (12)$$

4.3 停留条件

操作量 $\{u\}^i$ を決めるために、次式を用いる。

$$\frac{\partial J_n}{\partial u^n} = 0, \frac{\partial J_n}{\partial u^{n+1}} = 0, \dots, \frac{\partial J_n}{\partial u^{n+m-1}} = 0 \quad (13)$$

4.4 操作量

式(9)~(12)を式(13)に代入して、整理すると次式を得る。次式から、操作量 $\{u\}^n \sim \{u\}^{n+m-1}$ が、求められる。

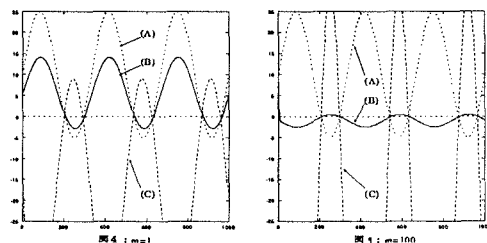
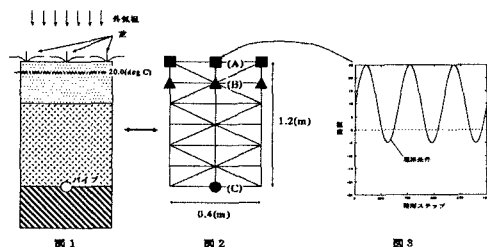
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u^n \\ u^{n+1} \\ \vdots \\ u^{n+m-1} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^n \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^n \\ f^{n+1} \\ \vdots \\ f^{n+m-1} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^* \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

上式から、操作量 $\{u\}^n$ が求められ、外力 $\{f\}^n$ とで状態量 $\{\theta\}^{n+1}$ が、式(5)から得られる。以上から、全時間の操作量を求めるのである。

5 数値解析例

図1は地盤の断面図を表し、図2は有限要素メッシュを表している。そして、図3で示されている温度が図2の(A)に与えられたとき、目的点(B)での温度を制御するために、操作点(C)での温度が予測制御法に基づいて計算されている。予測ステップmは、境界条件の情報が現在時間からmステップ先まで分かっているということを示している。

本論文では、数値解析を2ケース行っている。図4、5は、それぞれ予測ステップm=1, 100の場合の計算結果が示されている。ただし、その他の条件は $Q = 1.0$, $R = 0.0$, $\rho C_p = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\Delta t = 1.0(\text{sec})$ であり、目的温度は $0.0(\text{deg C})$ として解析を行っている。



6 終りに

図4,5より、十分に良い結果が得られていることが考えられる。それは、予測ステップが増加するほど、目的点での温度が目的温度 $(0.0(\text{deg C}))$ に制御されているという点である。また、予め全時間の境界条件を必要としなくても、予測制御法ではある程度先までの境界条件を知ることができれば、十分な制御が行えるという事が結果により示されている。これらから、少なくとも予測制御法は、全時間の境界条件を必要とする最適制御よりも、実際の使用に適している事がわかるであろう。

今後の課題としては、実際に近い条件の下で解析を行ってみる必要があると思われる。