

III-B 393 写像による要素分割と写像領域における有限要素解析の精度

神戸大学工学部 正会員 川谷 健
 神戸大学大学院 学生員 〇山根 雄一
 住友金属工業（株） 斎藤 雅彦

1. はじめに

有限要素法の利点の1つは、対象領域の境界形状が複雑であっても、それをかなり忠実に解析に取り込むことである。しかし境界形状が複雑であると、解析実行前の準備作業、例えば領域の要素分割、節点座標の読み取り、領域積分のための領域全体の節点と各要素の節点との対応づけ等々がきわめて煩雑になる。

要素分割の簡易化のために写像を利用する方法がある。ここでは、有限要素法による解析を前提として、写像を利用した要素分割手法の適用性および写像領域で実行した解析の精度について検討した結果を述べる。

2. 要素分割の方法

要素分割の手法としては、ラプラス方程式を2つの座標系で解く方法がある¹⁾。図-1のように、 ξ - η 座標系の解析領域（計算領域と呼ぶ）は長方形で、 $\xi = \text{const.}$ および $\eta = \text{const.}$ の直交する直線群で分割されているとする。一方、実際の解析領域（物理領域と呼ぶ）は x - y 座標系とする。計算領域で $\xi, \eta = \text{const.}$ の直線群はそれぞれラプラス方程式 $\Delta \xi = 0$ および $\Delta \eta = 0$ の解である。そして、これら直線群の x - y 座標系における写像は、両式を x, y 座標に変換した式の解として与えられ、計算領域の節点に対応する物理領域の節点座標が決定される。解は一般に差分法で求められるが、式が非線形のため、線形化に伴う繰り返し計算が必要である。また境界条件として物理領域の外周上の節点座標は規定されなければならない。

3. 要素分割手法の適用例

図-2に示す要素分割の結果では、外周の節点座標が規定された条件下で可能な限り、格子間隔が一樣になる傾向がみられる。この例では $\max(x) = 15$ および $\max(y) = 12$ で、収束条件が $\{\max(x_{k+1} - x_k) \text{ or } \max(y_{k+1} - y_k)\} \leq 10^{-4}$ （ここに添字 k は繰り返し計算の回数）のとき、計算回数 $k = 33$ 回で収束した。

要素分割に際して、例えば井戸での揚水・注水の問題を解析しようとする場合、領域内の特定の点（井戸の地点）が節点となるように分割することが必要となる。図-3に、領域内部の節点座標を規定した場合の分割結果を示す。座標が規定された節点を含む要素はかなり大きく変形するが、その他の要素は（内部座標を規定しない場合と比べて）変形が小さい。図-4は、領域形状がさらに複雑で、内部節点を規定した例である。

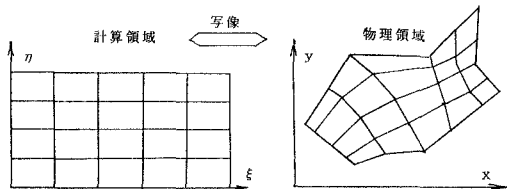


図-1 計算領域と物理領域

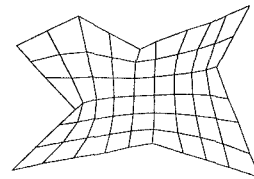


図-2 要素分割の結果

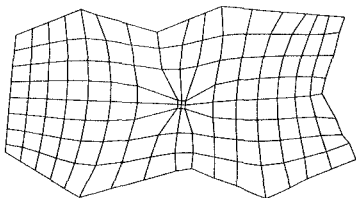


図-3 要素分割（内部の節点座標を規定した場合）

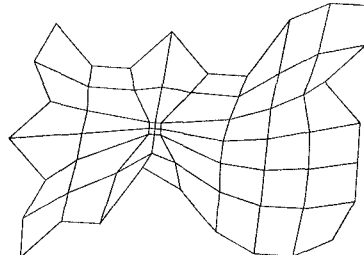


図-4 要素分割の結果

4. 写像領域における水頭分布の解析例

図-5のように、掘割の両側に矢板がある場での被圧地下水流を取り上げ、水頭分布について、計算領域（写像領域）での解析結果と物理領域での解析結果を比較した。地盤は異方性とし、 y -方向と x -方向の透水係数の比（ K_y/K_x ）は0.3とする。上流境界（a-A）の水頭は20、下流境界（h-B）の水頭は15、掘割の底面（d-e）での水頭は6とする。図-6に写像および解析の手順を示す。まず透水係数の比（ K_y/K_x ）の平方根をスケールとして、異方性の場を等方性の場に変換する。つぎに、等方性の場に変換された解析領域を $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ の矩形領域に写像し、写像によって生じた「ひずみ」を ξ - η 領域の格子点で算定する。この「ひずみ」は計算領域における「透水係数テンソル」と考えることもできる。

図-7に解析結果を示す。写像した場合の水頭値は、写像しない場合と比べ、定性的にはほぼ等しいが、定量的にはほとんどの領域で「およそ1程度小さい」。これは、 ξ - η 領域が透水係数（ひずみ）に関して不均質性・異方性の極めて高い場であることによると考えられる。

5. 結論

写像を利用した要素分割手法はきわめて柔軟性に富み、適用性が高いと言える。一方、写像領域で（浸透流の）有限要素解析そのものを実行することは、それほどメリットのあることではないと言える。有限要素解析を前提とする場合、要素分割にのみ写像を利用し、解析は実領域（物理領域）で実行する方が良い結果が得られると考えられる。

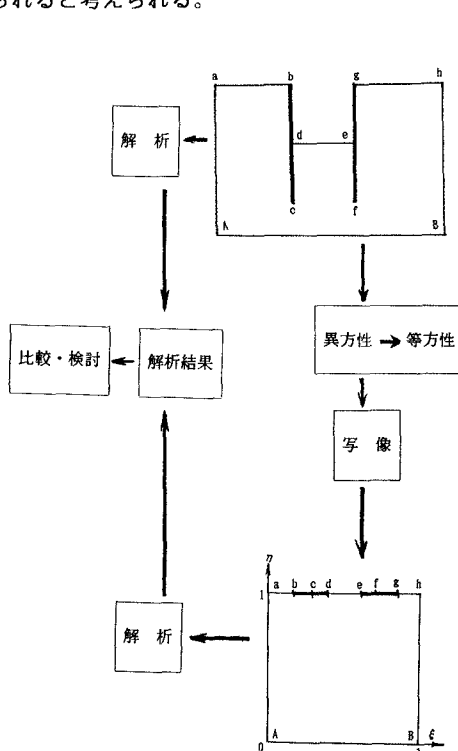


図-6 写像および解析の手順

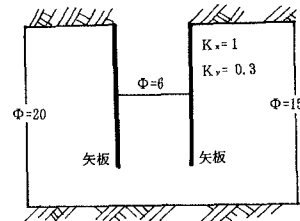
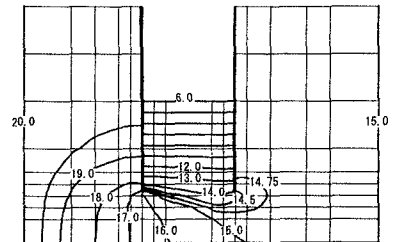
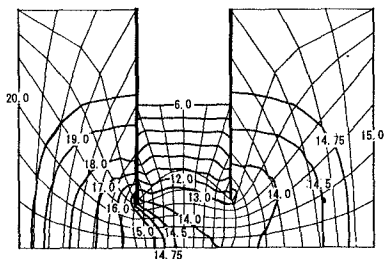


図-5 解析領域



(物理領域での解析)



(写像領域での解析)

図-7 水頭分布と要素分割