

### III-A 325 静水圧に依存する強度異方性降伏関数の材料定数の評価手法

法政大学 学 谷岡 昭寛  
 法政大学 正 草深 守人  
 法政大学 正 武田 洋

**1. はじめに:** 静水圧依存の降伏関数として広く用いられている代表的なものの一つとしては等方性材料に対するDrucker-Pragerの降伏関数があり、異方性材料に対してはTsaiやParisseauの降伏関数などが提案されている。本研究では、岩盤材料のように複雑な強度異方性を示す材料に対してもその適用範囲を広げるために、従来の基本的な降伏関数の自然な拡張としての新たな静水圧依存型の降伏関数を提案する。また、降伏関数に現れる材料パラメータの物理的意味が明確で、かつその決定に特別な材料試験を必要としないことを配慮した。

**2. 応力空間基底補正型の降伏関数:** ここでは降伏関数を考える際に等方性モデルを基本とし、異方性の影響は降伏関数を表す応力空間の基底に現れるものとする。Drucker-Prager型の異方性降伏関数としては次の表現を考える。

$$\begin{aligned} & [(b_1\sigma_{11} - b_2\sigma_{22})^2 + (b_2\sigma_{22} - b_3\sigma_{33})^2 \\ & + (b_3\sigma_{33} - b_1\sigma_{11})^2 + b_4^2\sigma_{12}^2 + b_5^2\sigma_{23}^2 + b_6^2\sigma_{31}^2]^{1/2} \\ & + a_1\sigma_{11} + a_2\sigma_{22} + a_3\sigma_{33} = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

**3. 材料試験と材料定数の決定方法:** 次に、上記の降伏関数に含まれる材料パラメータの決定方法を考察するため、材料の主軸に一致した応力軸の基底を次式で補正する。

$$\hat{\sigma}_{11} = r_1\sigma_{11} \quad : \quad \hat{\sigma}_{22} = r_2\sigma_{22} \quad : \quad \hat{\sigma}_{33} = r_3\sigma_{33} \quad (2)$$

ここで、 $r_i$  は応力軸の基底を補正する係数である。実応力空間での材料の各主軸方向の一軸圧縮降伏強度を  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$  とすると、これらは基底補正された応力空間で互いに等しい一軸圧縮降伏強度  $\hat{\sigma}_u$  として次式で表される。

$$\hat{\sigma}_u = r_1\sigma_{1u} = r_2\sigma_{2u} = r_3\sigma_{3u} \quad (3)$$

さらに、式(3)で表される降伏強度  $\hat{\sigma}_u$  を実応力空間での値を用いて次式で定義するものとする。

$$\hat{\sigma}_u = \frac{\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}}{3} \quad (4)$$

式(3)と式(4)から応力軸の基底補正係数は次式で表される。

$$r_i = \frac{\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}}{3\sigma_{iu}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

基底補正された応力空間で材料は等方的であることから、式(1)はDrucker-Pragerの降伏関数と同様な表現で書けるものと仮定し、次式のように書く。

$$\sqrt{\hat{J}_2} - \hat{\alpha}\hat{I}_1 = \hat{k} \quad (6)$$

ただし、ここでは対象とする材料が岩盤等の地質材料であることから圧縮を正としている。上式は、主応力状態に対して次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{6}[(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)^2 + (\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_3)^2 + (\hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}_1)^2]} \\ & - \hat{\alpha}(\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_3) = \hat{k} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、上式に式(2)を代入し、正規化すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{6\hat{k}^2}[(r_1\sigma_{11} - r_2\sigma_{22})^2 + (r_2\sigma_{22} - r_3\sigma_{33})^2 + (r_3\sigma_{33} - r_1\sigma_{11})^2]} \\ & - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}}(r_1\sigma_{11} + r_2\sigma_{22} + r_3\sigma_{33}) = 1 \end{aligned} \quad (8)$$

主応力状態での式(8)と式(1)の係数を比較することにより、強度異方性としての材料定数が次式で表される。

$$a_1 = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}}r_1 \quad : \quad a_2 = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}}r_2 \quad : \quad a_3 = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}}r_3 \quad (9)$$

$$b_1 = \frac{r_1}{\sqrt{6\hat{k}}} \quad : \quad b_2 = \frac{r_2}{\sqrt{6\hat{k}}} \quad : \quad b_3 = \frac{r_3}{\sqrt{6\hat{k}}} \quad (10)$$

なお、式(6)または式(7)の関係から、 $\hat{\alpha}$  は  $\sqrt{\hat{J}_2} \sim \hat{I}_1$  平面上での直線勾配として次式で与えられる。また、基底補正された応力空間での不変量 ( $\hat{I}_1$  と  $\hat{J}_2$ ) は、主応力状態に対して式(2)と式(5)を用いて求められる。

$$\hat{\alpha} = \frac{\Delta\sqrt{\hat{J}_2}}{\Delta\hat{I}_1} \quad (11)$$

ここで、 $\Delta$  は拘束圧の異なる任意の二つの3軸圧縮試験結果の差を表す。また  $\hat{k}$  は、材料の主軸方向に関する1軸圧縮試験結果を用いて式(7)より次式で決定できる。

$$\hat{k} = (\sqrt{1/3} - \hat{\alpha})\hat{\sigma}_u \quad (12)$$

以上より、式(5)で決定される  $r_i$  および式(11)と式(12)で決定される  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{k}$  を式(9), 式(10)に代入すれば材料定数 ( $a_1, a_2, a_3$ ) と ( $b_1, b_2, b_3$ ) を決定できることになる。ただし、材料パラメータを決定するために実施する1軸圧縮試験と3軸圧縮試験は材料の主軸に一致させた方向で試験する必要がある。一方、せん断応力成分に関する材料定数 ( $b_4, b_5, b_6$ ) については純せん断試験から直接決定可能である。そこで、これらの定数をごく一般的な材料試験から決定する方法について検討した。この方法は主軸を任意の2つの軸で表される平面  $i-j$  内で45度回転した1軸圧縮試験強度  $\sigma_{u,i-j}$  を利用するものである。この試験では、材料主軸に直交する面は最大せん断応力面であり、作用応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_2) = \frac{1}{2}\sigma_{u,i-j} \\ \tau_m &= \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_2) = \frac{1}{2}\sigma_{u,i-j} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $\sigma'_i$  は材料の主軸から45度傾いた面の応力、すなわち1軸圧縮試験の載荷軸およびそれに直交する方向の応力を表す。材料主軸で見た応力は最大せん断応力面に作用する応力に一致することから次式で与えられる。

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_m \quad : \quad \sigma_{33} = 0 \quad : \quad \sigma_{12} = \tau_m \quad : \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \quad (14)$$

この応力状態は降伏条件式(1)を満足していなければならない。よって、式(14)、式(13)を式(1)に代入することで材料定数 ( $b_4, b_5, b_6$ ) が次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 b_4 &= \sqrt{\left(\frac{2}{\sigma_{u,1-2}} + a_1 + a_2\right)^2 - 2(b^2_1 + b^2_2 - b_1b_2)} \\
 b_5 &= \sqrt{\left(\frac{2}{\sigma_{u,2-3}} + a_2 + a_3\right)^2 - 2(b^2_2 + b^2_3 - b_2b_3)} \\
 b_6 &= \sqrt{\left(\frac{2}{\sigma_{u,3-1}} + a_3 + a_1\right)^2 - 2(b^2_3 + b^2_1 - b_3b_1)}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

**4. 静水圧異存型降伏関数の幾何学的性質:** 図1は材料の第一・第二主軸方向の一軸圧縮強度比をを等方性の1:1から異方性の2:1まで変化させた場合のPariseauの降伏曲面を $\pi$ 平面表示したものである。同図より、材料主軸方向の強度差が大きくなるに従って降伏曲面が大きく歪み、異方性を示しているが、第一主軸に対する引っ張りまたは圧縮伸張強度が同方向の圧縮強度を超えて極端に増大する傾向にある。このような異方性を示す地盤材料は通常では考えにくい。このことからその適用範囲は異方性が比較的小さい材料に限定されるものと考えられる。図2は、応力空間の基底を補正した異方性降伏関数を表示したものである。この降伏関数は静水圧軸に対して、偏心した楕円錐を示しており、偏差応力の第二不偏量（せん断成分）と静水圧応力成分のそれぞれに対する異方性の効果を表現していることがわかる。図3はPariseauの降伏関数との比較を行うために、図1と全く同じ条件で $\pi$ 平面表示したものである。材料主軸に関する強度比が大きくなるに従って降伏曲面に歪みが生じ、異方性を示していることがわかる。特に、材料主軸に対する強度比が増大し異方性が強くなっても Pariseau の降伏関数のように引っ張りまたは圧縮伸張強度が増加するような不都合を生じていないことがわかる。

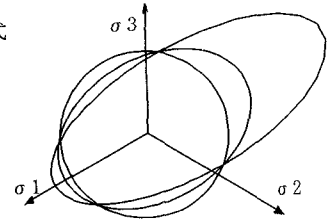


図1: Pariseauの降伏曲面 ( $\pi$ 平面表示)

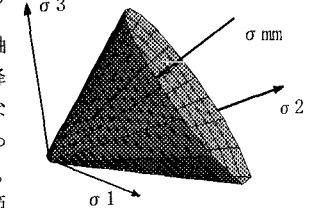


図2: 応力空間基底補正型降伏関数の降伏曲面

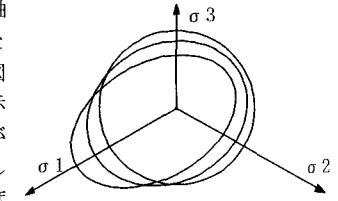


図3: 応力空間基底補正型降伏関数の降伏曲面 ( $\pi$ 平面表示)

**5. 数値解析:** 図4は $\phi$ と $c$ についてそれぞれ1:2の比で異方性を持つ岩盤モデルについて三軸圧縮強度の数値解析を行ったものであるが、側圧が増加するに従って強度異方性が強く現れており、また最小強度を示す層理角が側圧の増加に伴って45°から30°へと移っていくことがわかる。この傾向は、実際の結晶片岩等のような岩盤材料の三軸圧縮試験結果に関するこれまでの報告と一致する。また、一軸圧縮強度の解析結果を図5および図6に示す。これらの図を比較すると、 $\phi$ と $c$ についての異方性の影響は $c$ の方が大きく、これは一軸応力状態に対する経験的事実に一致している。以上の考察を総合すると、提案する応力空間基底補正型降伏関数は、静水圧に依存する材料の降伏強度を、等方性から異方性までの広い範囲で表現できる可能性を持っているものと考えられる。

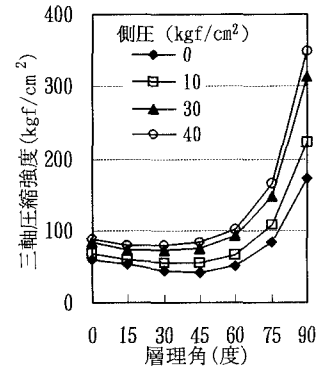


図4: 層理角と三軸圧縮強度の関係

**6. あとがき:** 本研究では、等方性から大きな異方性までを統一的に表現できる静水圧依存型降伏関数と材料パラメータの評価手法を提案した。ここでは省略しているが、人工積層岩盤の実験と解析の比較を行った結果からも、提案した降伏関数の妥当性がうかがえた。今後は、実際問題への適用や現場計測値との比較・検討などにより本提案の妥当性、改善点を明らかにする必要がある。

本研究を進めるにあたって、(株)間組および東京電力(株)のご協力を得たことを深く感謝します。

**[参考文献]**

- 1) W.F. Chen and D.J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- 2) W.C Pariseau, "Plasticity Theory for Anisotropic Rocks and Solids", *Proceedings of the Tenth Symposium of Rock Mechanics*, Chapter 10, University of Texas, Austin, 1968.

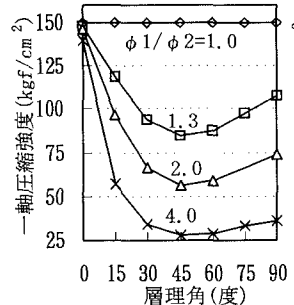


図5: 層理角と一軸圧縮強度の関係(cについて異方性)

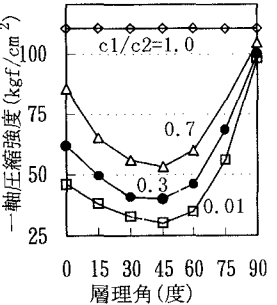


図6: 層理角と一軸圧縮強度の関係(phiについて異方性)