

III-A 246 有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる円柱供試体の非軸対称分岐解析

金沢大学大学院 学生員 ○志比利秀  
 金沢大学工学部 正会員 矢富盟祥

**1.はじめに** 円柱形正規圧密粘土の供試体を軸方向に低速度で圧縮すると、軸応力の小さいうちは一様に変形するが、最大応力に近づくにつれ、供試体の寸法比にもよるが大体、対称（バルジなど）、非対称、またはそれらの合成モードの変形などが現れる。最大応力近傍に達するとせん断ひずみの局所化が観察され、時には、網目状のすべり面群が生成され、最終的に一つのすべり面が発達すると、耐荷力を失い破壊へといった。そこで本研究では、円柱供試体に側方水圧一定条件を与え有限変形非共軸 Cam-clay モデル<sup>1)</sup>による非軸対称分岐解析を行いその理論解を誘導し、分岐荷重の考察を行った。

**2.試験条件** 本解析では Fig.1 のような半径  $R$ 、高さ  $2H$  の円柱供試体を考える。原点は供試体の中心、 $z$  軸はその対称軸に一致するような円柱座標  $(r, \theta, z)$  を用いる。供試体は軸方向に変位制御で圧縮し、上下端面には摩擦なし、側方荷重は水圧一定で与えるものとする。また、Cauchy 応力  $T_{ij}(i, j = r, \theta, z)$  等は、引張りを正、応力  $\sigma_i(i = r, \theta, z)$ 、間隙水圧  $u$  等は土質力学の慣例に従い圧縮を正とする。また、透水係数を  $k$  とし、水の密度  $\gamma_w = 1$ 、水頭が間隙水圧  $u$  のみで与えられるとすると間隙水の連続式はストレッチング  $D$  を用いて  $\text{tr} D = k \Delta u$  で与えられる。各点排水条件下でも、本分岐解析では、均一変形状態から非均一変形状態への分岐問題を対象とするため、分岐の瞬間までは有効応力、間隙水圧は一樣であると考えると間隙水の連続式から結局次の各点非排水条件を得る。

$$D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{zz} = 0 \tag{1}$$

なお、本解析では分岐時の応力差  $q(= \sigma'_z - \sigma'_b)$  と平均有効応力  $p'(= (2\sigma'_b + \sigma'_z)/3)$  の比  $q/p'$  をもって「分岐荷重」と呼ぶ。ここで、 $\sigma'_z$  は軸方向、 $\sigma'_b$  は側面の有効応力である。

**3.増分釣合式** 準静的で物体力のない場合の増分釣合式は次式で与えられる。

$$\text{div } \dot{S}_i = 0 \tag{2}$$

ここで、 $\dot{S}_i (= \dot{T} + T(\text{tr} D) - TL^T)$  は全公称応力速度、 $L$  は速度勾配である。分岐の瞬間までは有効応力、間隙水圧が一樣であるから、円柱座標  $(r, \theta, z)$  を用いると、増分釣合式は次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{T}_{rr,r} + \dot{T}'_{\theta,\theta}/r + \dot{T}'_{z,z} + (\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta})/r - \dot{u}_{,r} &= 0 \\ \dot{T}'_{\theta,r} + \dot{T}'_{\theta\theta,\theta}/r + \dot{T}'_{\theta z,z} + 2\dot{T}'_{r\theta}/r - \dot{u}_{,\theta}/r &= 0 \\ \dot{T}'_{z,r} + \dot{T}'_{z\theta,\theta}/r + \dot{T}'_{z z,z} + \dot{T}'_{z r}/r - \dot{u}_{,z} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

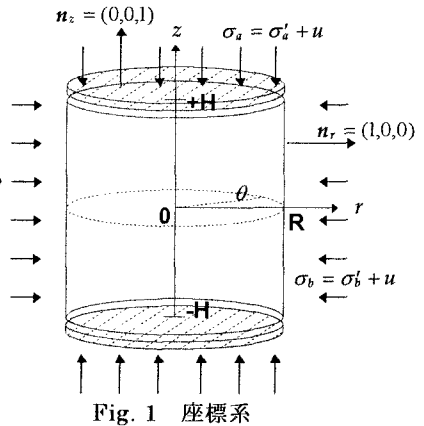
**4.境界条件** 境界条件は Fig.1 のように供試体上下端面 ( $z = \pm H$ ) で摩擦なし、一定速度  $w_{10} (> 0)$  による変位制御圧縮、側面 ( $r = R$ ) の曲面で側方水圧一定条件とすると次式のようになる。

$$\begin{aligned} v_z = \mp w_{10} \quad , \quad (\dot{s}_i)_r = 0 \quad , \quad (\dot{s}_i)_\theta = 0 \quad : \quad (z = \pm H) \\ (\dot{s}_i)_r = \sigma_b L_{rr} \quad , \quad (\dot{s}_i)_\theta = \sigma_b L_{r\theta} \quad , \quad (\dot{s}_i)_z = \sigma_b L_{rz} \quad : \quad (r = R) \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、 $\dot{s}_i (= \dot{S}_i \mathbf{n})$  は全公称表面力速度、 $\mathbf{n}$  は各々の面の単位法線ベクトルである。

支配方程式が速度勾配に関して線形であるから、供試体の変形が均一変形と非均一変形から構成されるものと考え、増分境界値問題の解は均一境界条件と非均一境界条件の解の和となる。このとき、均一な変形は増分釣合式、境界条件を自動的に満足するので、求めるべき分岐条件式は増分釣合式と次式の非均一変形に寄与する境界条件より求められる。

$$\begin{aligned} v_z = 0 \quad , \quad \dot{T}'_{z z} = 0 \quad , \quad \dot{T}'_{\theta\theta} = 0 \quad : \quad (z = \pm H) \\ \dot{T}'_{rr} = \dot{u} \quad , \quad \dot{T}'_{\theta\theta} = 0 \quad , \quad \dot{T}'_{z r} = -q v_{r,z} \quad : \quad (r = R) \end{aligned} \tag{5}$$



**5.構成式** 有限変形非共軸 Cam-clay モデルの構成式を参考文献1)より,  $D$ , スピン  $W$ , および有効 Cauchy 応力の Jaumann rate  $\dot{T}'(=\dot{T}' - WT' + T'W)$ , を用いて次式のように表わす.

$$\dot{T}'_{zz} - (\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta})/2 = 2\mu^* \{D_{zz} - (D_{rr} + D_{\theta\theta})/2\}, \quad \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} = 2\mu(D_{rr} + D_{\theta\theta}) \quad (6)$$

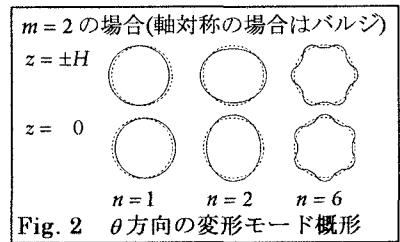
$$\dot{T}'_{r\theta} = 2\mu D_{r\theta}, \quad \dot{T}'_{rz} = 2\mu D_{rz} - qW_{rz}, \quad \dot{T}'_{\theta z} = 2\mu D_{\theta z} - qW_{\theta z}$$

ここで,  $\mu^*(=\tilde{h}\tilde{G}/(\tilde{h}+\tilde{G}))$  (ただし,  $\tilde{h}=\tilde{K}\tilde{\beta}^2+h$ ),  $\mu(=h_1\tilde{G}/(h_1+\tilde{G}))$  は, 45 度せん断および単純せん断におけるせん断剛性である. ただし,  $\tilde{G}(=3(1+e)(1-2\nu)p'/2\kappa(1+\nu))$  はせん断弾性定数,  $\tilde{K}(=(1+e)p'/\kappa)$  は体積圧縮係数,  $h(=\tilde{\beta}p'/\sqrt{3}D)$  は硬化係数,  $h_1(=\tilde{\beta}p'/\sqrt{3}A)$  は第2硬化係数,  $\tilde{\beta}=(M-q/p')/\sqrt{3}$  である. また,  $\nu(=0.333)$  はポアソン比,  $e(=1.5)$  は間隙比,  $\kappa(=0.042)$  は膨潤指数,  $D(=0.053)$  はダイレイタンシー係数,  $M(=1.43)$  は限界パラメータである.  $A(>0)$  は非共軸項と呼び,  $A=0$  のとき共軸モデルを表わす.

**6.分岐条件式の誘導方法** 上下面の境界条件(5)<sub>1</sub>, 速度場の連続条件, 間隙水の連続式(1), 構成式(6)および増分釣合式(3)より, 未定定数  $c_1, c_2, c_3$  を用いて 速度場は次式のようにおける.

$$\begin{aligned} v_r &= -\{c_1 J_n(\sqrt{\alpha_1} k_m r) + c_2 J'_n(\sqrt{\alpha_2} k_m r) + c_3 I_n(\sqrt{\alpha_3} k_m r)/r\} \cos(n\theta) \sin(k_m z) \\ v_\theta &= \{c_1 n J_n(\sqrt{\alpha_1} k_m r)/r + c_2 n J_n(\sqrt{\alpha_2} k_m r)/r + c_3 I_n(\sqrt{\alpha_3} k_m r)\} \sin(n\theta) \sin(k_m z) \\ v_z &= k_m \{c_1 \alpha_1 J_n(\sqrt{\alpha_1} k_m r) + c_2 \alpha_2 J_n(\sqrt{\alpha_2} k_m r)\} \cos(n\theta) \cos(k_m z) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで,  $J_n(n=0,1,2,\dots)$  は  $n$  次の第1種ベッセル関数,  $I_n(n=0,1,2,\dots)$  は  $n$  次の第1種変形ベッセル関数,  $\alpha_1=(b+\sqrt{b^2-ac})/2a$ ,  $\alpha_2=(b-\sqrt{b^2-ac})/2a$ ,  $\alpha_3=c/\mu$ ,  $a=2\mu+q$ ,  $b=\mu-3\mu^*$ ,  $c=2\mu-q$  である. また,  $k_m=m\pi/2H$ ,  $m=1,2,\dots$ ,  $n=0,1,2,\dots$ .  $m$  は  $z$  方向の変形モード (ただし,  $m$  が偶数のとき,  $z$  座標の原点を  $H/m$  だけ移動させる必要がある),  $n$  は  $\theta$  方向の変形モードを表わす (Fig.2 参照). 特に  $n=0$  の場合は軸対称変形を表わし,  $n=1$  のとき非対称座屈モードを表わす. 式(7)の速度場を側面の境界条件(5)<sub>2</sub>に代入し未定定数  $c_1, c_2, c_3$  の係数行列の行列式を零にすることにより分岐条件式が得られる. 分岐条件式は分岐荷重  $q/p'$ , 供試体寸法比  $R/H$ ,  $z$  方向の変形モード  $m$ ,  $\theta$  方向の変形モード  $n$ , 非共軸項  $A$  の陰関数で与えられる.



**7.解析結果と考察** Fig.3 に共軸および非共軸モデル( $A=0.01$ )の分岐荷重を示す. 共軸モデルは座屈モード( $n=1$ )以外, 分岐荷重が存在せず (バルジなどの分岐荷重は存在しない), 寸胴の供試体においては分岐が生じない. このことから非共軸モデルの方が実際現象をうまく説明できる. また, 供試体寸法比が小さい場合, すなわち供試体が細長い場合は座屈モードの分岐荷重が極めて低いことが分かる. また, 非共軸モデルの場合, 座屈モード以外については  $m$  が大きいほど, あるいは  $n$  が小さいほど分岐荷重が小さいことが分かる. Fig.4 に非共軸モデルのいくつかの変形モードの分岐荷重を示す. 供試体寸法比を固定すると  $m=1$  の座屈モード( $n=1$ ),  $m=1$  および  $m=2$  のバルジモード( $n=0$ )の分岐荷重が最も低くなるが, 高次の変形モードはほぼ変わらない分岐荷重で生じることがわかる. これにより, 変形モードの移り変わりや網目状のすべり面群の生成の可能性が説明できる.

**参考文献**

1) C.Yatomi et. al., Soils and Foundations, vol.29, 1989.

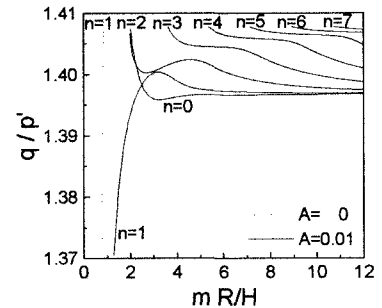


Fig. 4 分岐荷重とモード および寸法比の関係 (1)

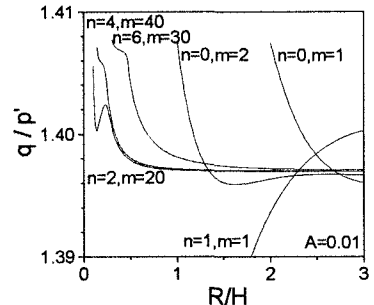


Fig. 3 分岐荷重とモード および寸法比の関係 (2)