III－A 11

地盤材料の分岐と安定性：Lade とDrucker の討議について

東北学院大学工学部土木工学科　（正）飛田　善雄

１．まえがき

摩擦により粒子間力が伝達され、ダイレイタンシーが無視できない地盤材料については、Hill（あるいはよりきつい条件であるDrucker）の安定性の条件が適用できないとする議論は、過去断続的になされてきた（簡潔なまとめに関して、飛田(1996)参照）．以下に示すLade ら(1987)の実験結果は再びこの問題に注目を集める結果となった．Ladeらの主張に対して、Druckerは反論を行なっている．地盤材料を対象とした力学系の安定性の条件に関して、はっきりとした結論が得られない理由は次の３点に集約できよう：(1)どのような安定性の条件であれ、十分条件に過ぎないこと；(2)安定性の条件はあくまでも数学的な解の安定性の条件であり、必ずしも物理的・力学的実際挙動の安定性と直結しないこと；(3)安定性を定義する上で、現象を考察する視点が異なること．本文では、Lade とDrucker の討議を簡単に紹介し、さらに分岐と安定性について簡単に復習し、この討議の意味することを明らかにする．

２．Ladeらの実験とDrucker & Liの反論

Ladeら(1987)は、３軸試験機を用いてDruckerおよびHillの安定性の条件が砂の変形挙動に適用可能かどうかを排水条件、非排水条件に対して検討した．その結果、排水条件において、これらの安定性の条件（Hill: $\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}>0$; Drucker: $\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}>0$)が成立しない応力経路においても全く安定なかつ均一な変形挙動が得られることを明らかにした．飽和砂の非排水変形ではHillの安定性の条件が妥当な結果を与えることを示した．さらに、飽和度の低下と共に実験による安定性が増大し、これらの条件との一致性が悪くなることも示している．

この実験結果に対し、Drucker & Li(1993)は、ある特殊な分岐モードを詳細に検討して、均一な変形は$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}>0$の条件が喪失すれば、その安定性は失われ、分岐モードの発生が生じることを示した．しかし、モードは境界条件を満足するという条件が課されるために大きく成長することはできず、供試体全体で見ると、詳細な観察であっても、均一な変形が卓越するという結果が得られても不思議ではないことを示した．このことより、　Drucker あるいはより緩いHillの安定性の条件が砂のような粒状体に対しても安定性の条件として、妥当なものであると主張している．これらの相反する粒状体の安定性に関する結論を分岐と安定性という観点から、定性的に理解しておくことは重要なことである．

３．分岐と安定性の一般的な理論

増分境界値問題を考える．以下ではより一般性の高いHillの安定性の条件のみを対象にする．簡単のために<u>均一な変形の安定性のみ</u>について議論する．与えられた境界条件に対して、基本的な均一解v^{o}_{i}と共に、それとは異なる解の存在も考え（分岐解の存在）、それを$v^{*}_{i}=v^{o}_{i}+\tilde{v}_{i}$と表現する．もし、摂動解$\tilde{v}_{i}$が成長できる条件が満足されれば、基本解の$v^{o}_{i}$は安定性を失い、変形モードとしては$v^{*}_{i}$が卓越することになる．

増分境界値問題に対して、分岐解が存在しないための十分条件は、微小ひずみの範囲で次式の様に与えられる．

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}E_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl}>0 \quad\text{..........(1)}$$

ここにE_{ijkl}は速度型構成式の接線剛性テンソルを表現する；すなわち、

$$\dot{\sigma}_{ij}=E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \quad\text{..........(2)}$$

が与えられる．分岐の初期状態のみに着目して、基本解・分岐解両者に同一の構成式が使えるものと仮定する．(2)の**E**としては、問題を簡単にするために、載荷、除荷に応じて２つの相異なる応答を示す弾塑性体を載荷状態の剛性テンソルのみを対象とする線形比較体に置き換える（このような処理をしないと線形代数の問題に帰着させることができず、弾塑性体の分岐・安定問題の解析は極めて困難になる）．

(1)式はいわゆる２次形式であるので、**E**が対称でない場合($E_{ijkl}\neq E_{klij}$)には、その対称部分$E^{s}_{ijkl}=(1/2)\{E_{ijkl}+E_{klij}\}$のみが符号に寄与することになる．その結果、(1)の条件は線形代数学の基本的な定理によって、$\mathbf{E}^{s}$の最小固有値$\lambda_{min}>0$という条件に置き換えることができる．力学の問題は初期状態では$\lambda_{min}>0$は満足されており、唯一解の喪失は最初に$\lambda_{min}=0$となる条件を求めることを考慮すると、$\det[\mathbf{E}^{s}]>0$という条件に帰着できる．

Hillの安定性の条件は、死荷重を考える場合、次の様に記述できる．

$$\dot{\varepsilon}_{ij}E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}>0 \quad \text{for any } \dot{\varepsilon}_{ij} \quad\text{..........(3)}$$

(3)式が成立する条件も、同様の議論により$\det[\mathbf{E}^{s}]>0$に帰着できることが分かる．結局、Hillの安定性の条件は、**E**が対称・非対称にかかわらずに解の唯一性の条件の意味を有していることが分かる．基本解のみが可能であれば、基本解は安定でなければならない（すなわち、唯一

解であれば必ず安定である．逆は必ずしも成立しない）．この議論より、Hillの安定性の条件は、いかなる分岐モードも除外した基本解の安定性を示していることがわかる．すなわち、Hillの安定性の条件は、どのような$\mathbf{E}$に対しても、基本解の安定性の十分条件となっている（図１参照　OからAまで）．

Hillの安定性の条件が破れ、分岐解の可能性が生じる領域（図１で、A点以降）では、分岐モードが実際に成長しうるかどうかを常に確認することが必要になる．どのような分岐モード（例として、せん断帯モード、周期的分岐モードなど）が最初に成長するかは、(2)式の$\mathbf{E}$に大きく依存するので、モード毎に検討することが必要になる．せん断帯モードに関してはかなり詳しく調べられており、砂のような粒状体に対して適切と考えられる非関連流動則の場合にはひずみ硬化状態（応力・ひずみ関係が正の勾配をもつ場合、図１でAからBまで）で、成長の条件（これは、基本的な均一解の安定性の喪失を意味している）が数学的に満足されることが知られている．予め指定できない分岐モードの成長を個々に計算するのでなければ、解の唯一性の条件と等価なHill の安定性の条件を用いるしか選択の余地はないというのがDrucker & Liの反論の基本的な背景であろう．

注意すべきことは、以上の数理的議論においては、あくまでも分岐のごく初期状態に着目し、線形問題に置き換えた議論であり、成長の条件が満足されたと言っても、実際にそのモードが成長し、実験的に観察されるかどうかについては全く答えられないことである．分岐モードが実際に成長すれば、解析に利用すべき構成式が変わるのはもちろんのこと、境界条件などの変更も必要となり、初期状態とは異なる境界値問題を取り扱うことが必要となる．

Ladeらの実験結果は、これらの分岐モードは、数学的には可能であってもそのモードが成長することはなく、実際には観察されず、均一な変形モードが卓越しており基本解である均一変形は、実際現象としては安定性を有すると考えてよいことを示している．

すなわち、Ladeらの主張とDrucker & Liの主張は、実験と数理的議論というアプローチの差異と共に、分岐の最終状態とごく初期状態に、安定性の判断を求めるという視点でも差があり、議論が噛み合っていないことになろう．

４．便宜的な安定性の条件の考察（飛田、1996）

様々な分岐モードに対して、その存在の可能性を検討することはかなり煩雑なものとなる．可能性が示された分岐モードが実際に成長するかどうかを検討することはさらに困難である．Ladeらの実験観察結果を利用して、実際に分岐モードが観察されず均一な変形が卓越することを利用することが便宜的な（工学的な）均一変形の安定性の条件として妥当なものと考えると、安定性の検討は摂動解として均一変形のみを対象にして行なえばよいことになろう．構成式として非関連流動則を用い、安定性の手法として動的定式化を用いると、排水時の均一変形の安定性の最初の喪失は、$\det[\mathbf{E}]=0$の条件で与えられることになり、その条件は応力・ひずみ関係のピークで与えられることになる．非排水時の場合には、固相と液相の変位速度が等しいことを利用し、さらに水の体積剛性係数が土の骨格の剛性と比較して大きいことを利用して解析すると、固相+液相の全体の剛性テンソルの非対称性が小さくなりほとんど対称となる．すなわち、完全飽和で非排水の場合には、近似的にHillの条件によりその安定性が検討できることになる．飽和度が低くなれば、間隙相の体積剛性が小さくなり、Hillの条件では現象を説明できなくなる．これらの結果は、Ladeらの実験に矛盾しない．すなわち．ある仮定のもとに、Ladeらの実験結果を正当な安定性解析で説明できることを示すことができ、ダイレイタンシー特性とHillの条件を組み合わせないと、粒状体の安定性を議論することができないというLadeらの主張は棄却することができる．地盤材料の分岐と安定性は、理論的基礎を十分に把握し、実際現象との関係を確実に把握することが必要である．

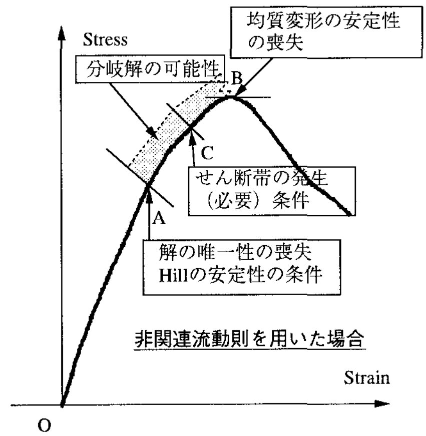

図１：分岐・安定性の条件と応力ひずみ関係

参考文献

Lade et al.(1987):J. Engng. Mech. ASCE**113**,p1302

Drucker & Lin(1993): J. Engng. Mech. ASCE,**119**,p1188

飛田(1996):構造工学論文集、土木学会　**42A**