

II-351

有限要素法による中間流・飽和地表面流の2次元流出モデル

(株) 日水コン 正員 柴田 研
 京都大学防災研究所 正員 椎葉 充晴
 京都大学工学部 正員 高棹 琢馬

1 はじめに 斜面系の短期流出過程を表現する理論に、石原・高棹の中間流・飽和地表面流理論[1]がある。ところが、今までその数理モデルは流れを1次元的に扱うものしか存在しなかった。

これをもって一般的な斜面流域を取り扱おうとすれば、対象流域を斜面の最急勾配方向に沿って分割し、1次元の流れのモデルに適合させる操作をしなければならない。しかし、この操作を経て新たに作り出された流域がもとの流域から大きく異なってしまう場合もある。また、斜面の勾配が緩い場合や、より正確に流れをモデル化したいときには流れをkinematic wave近似ではなくdiffusion wave近似した方がよい。しかし、diffusion wave流れは水面の最急降下方向に流れるので、流出計算に入る前に斜面をその中では流れを1次元的に取り扱える部分斜面に分割することが出来ない。つまり斜面上の2次元diffusion wave流れは2次元で解くしか方法がない。

そこで本研究では、斜面に沿った側方2次元の中間流・飽和地表面流の流れのモデルを導き、それを数値的に解く計算モデルを構成する。

2 側方2次元流れの支配方程式 側方2次元の流れを扱っている既存のモデルは、斜面上の流れを水平面上の流れと考え、空間座標に水平面上の直交座標系を用いている。しかし山地斜面流域は傾斜が大きく、そこでの流れが水平面上の流れだと見なすことは不適当である。そこで、流れは斜面に対して平行に流れると考え、空間座標に水平2次元座標系 (x, y) ではなく、斜面に沿ってとられた2次元座標系 (s_x, s_y) を用いる(図1)。 s_x 軸は斜面上で y を動かさずに x だけを動かした時に得られる曲線である。 s_y 軸も同様である。

(s_x, s_y) 座標系の上で導かれた、側方2次元の中間流・飽和地表面流の支配方程式が(1)式である。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q_{s_x}}{\partial s_x} + \frac{\partial q_{s_y}}{\partial s_y} = rn_z \quad (1)$$

ここで t は時間座標、 H は斜面と垂直に測った貯水深、 q_{s_x}, q_{s_y} は単位幅流量 q のそれぞれ s_x, s_y 方向成分、

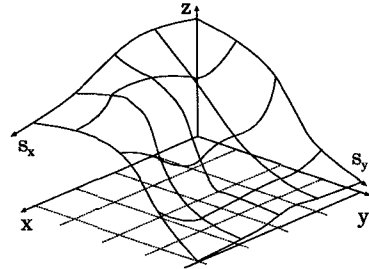


図1 (x, y) 座標系と (s_x, s_y) 座標系

r は降雨強度、 n_z は斜面上向き単位法線ベクトルの z 成分である。 q_{s_x}, q_{s_y} は(2)式、(3)式で表される。

$$q_{s_x} = |q| \{ \cos \alpha (\partial \phi / \partial s_y) - (\partial \phi / \partial s_x) \} / (I \sin^2 \alpha) \quad (2)$$

$$q_{s_y} = |q| \{ \cos \alpha (\partial \phi / \partial s_x) - (\partial \phi / \partial s_y) \} / (I \sin^2 \alpha) \quad (3)$$

ここで α は s_x 軸と s_y 軸がなす角度、 $\partial \phi / \partial s_x, \partial \phi / \partial s_y$ は流れのエネルギー(水頭)のそれぞれ s_x, s_y 方向の勾配である。この2つを斜面の勾配で評価すれば流れをkinematic wave近似、水面の勾配で評価すればdiffusion wave近似したことになる。

(2)式、(3)式中の I は流れの方向でのエネルギー降下率であり、(4)式で表される。

$$I = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial s_x} \right)^2 - 2 \frac{\partial \phi}{\partial s_x} \frac{\partial \phi}{\partial s_y} \cos \alpha + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s_y} \right)^2} \quad (4)$$

(2)式、(3)式中の $|q|$ は流れの方向の単位幅流量である。中間流にDarcy則、地表面流にManning則を適用し、地表面流の流速が中間流の流速に連続するように導かれた、中間流・飽和地表面流を統合した単位幅流量-貯水深関係式(5)式を流れの方向での運動方程式の近似式に採用する。

$$|q| = \begin{cases} kIH/\gamma & (H \leq \gamma D \text{ の時}) \\ kIH/\gamma + \sqrt{I}(H - \gamma D)^{5/3}/n & (H > \gamma D \text{ の時}) \end{cases} \quad (5)$$

ただし、 k, γ, D はそれぞれA層の透水係数、有効空隙率、斜面と垂直に測った層厚である。 n は地表面のManningの粗度係数である。

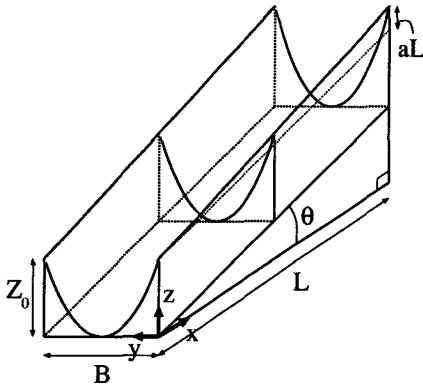


図2 数値実験した仮想斜面の形状

3 有限要素法による計算モデル 分水界と斜面末端に囲まれた解析対象領域 R を三角形要素で分割する。分水界では境界を横切る流量が0, 斜面末端では流れが等流であるという境界条件を与える。

三角形要素網への分割により生成された節点 i における貯水高の時間変化率 dH_i/dt を, Neuman[2] を参考に(6)式で評価する。

$$\frac{dH_i}{dt} = \frac{\int_R N_i (\partial H / \partial t) dR}{\int_R N_i dR} \quad (6)$$

N_i は節点 i についての形状関数である。なお, 形状関数には s_x, s_y についての1次関数を用いる。また, q_{sx}, q_{sy} の値が各三角形要素の中で s_x, s_y について線形変化すると見なせるとする。

これらの仮定と単位幅流量の貯水高に対しての Taylor 展開による準線形化を用い, 重み付け関数に形状関数を用いた重み付き残差法で, 前節に示した支配方程式を空間について離散化すると, 斜面全体について成り立つ, (7)式の形をした連立常微分方程式が得られる。

$$C(d\vec{H}/dt) + M\vec{H} = \vec{b} \quad (7)$$

$\vec{H}$ の各成分が節点の貯水高である。 $C, M, \vec{b}$ は係数行列, ベクトルであるが, $\vec{H}$ の関数である。

(7)式を完全陰的有限差分法で, $C, M, \vec{b}$ を $\vec{H}$ について変化させずに予測子・修正子法を用いて解く。得られた $\vec{H}$ から $C, M, \vec{b}$ を再計算し, $\vec{H}$ が十分収束するまで繰り返し求め直す。

4 適用例と考察 図2に示した形状の仮想斜面で数値実験した結果を報告する。この斜面内のある地点 (x, y) の比高 $z(x, y)$ は(8)式で表される。

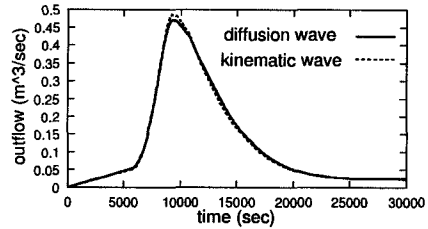
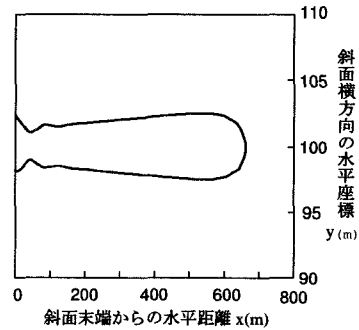


図3 流出ハイドログラフ


 図4 $t = 6000(\text{sec})$ での表面流発生域

$$z = x \tan \theta + (Z_0 + ax) \{ \cos(y/B + 1/2)\pi + 1 \} \quad (8)$$

この実験では $\tan \theta = 0.2, a = 0.00375, B = 200(\text{m}), L = 800(\text{m}), Z_0 = 30(\text{m})$ を, 流れのパラメタには $D = 0.5(\text{m}), \gamma = 0.15, k = 0.014(\text{m}/\text{sec}), n = 0.0247(\text{sec}/\text{m}^{1/3})$ を, 入力には $t = 0(\text{sec})$ から $t = 10800(\text{sec})$ まで一様な $10(\text{mm}/\text{hr})$ の降雨を与えた。

図3が, kinematic wave 流れと diffusion wave 流れの流出ハイドログラフである。diffusion wave 流れの波形の方がわずかながら緩やかである。

図4は diffusion wave 流れで表面流が発生して間もない時刻 ($t = 6000\text{sec}$) の表面流発生域である。斜面の上部の方が表面流の発生域が広がっている。尾根部の勾配が大きい斜面の上部の方が, 中間流出分がより速く流下するからであろう。

5 おわりに 側方2次元の中間流・飽和地表面流を有限要素法で解く計算モデルを構成し, 仮想の流域に適用した。今後は実流域にこのモデルを適用することと, 有限体積法によるモデル化を検討したい。

参考文献

- [1] 石原・高樟：中間流出現象とそれが流出過程に及ぼす影響について, 土木学会論文集, 第79号, pp.15-21, 1962.
- [2] Neuman: Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements, Proc. ASCE, 99, HY12, pp.2233-2250, 1973