土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

II-333　降雨波形を考慮した確率降雨モデルの提案

名城大学都市情報学部　正会員　張　昇平
（株）日水コン　正会員　浅田一洋

1. はじめに　中小河川の治水計画や都市域の排水計画では，計画降雨の設定法として確率降雨強度曲線法が一般的に用いられている．確率降雨強度曲線法では，継続時間別の確率降雨強度は極値確率モデルにより定めているが，降雨波形は経験に基づき確定的に設定することになっている．このように作成されたハイエトグラフは次のような問題点があることが指摘されている[1]．すなわち，ハイエトグラフ作成のもとにしている確率降雨強度曲線は，個々の降雨の継続時間，降雨原因，季節などがそれぞれ異なる多くの雨量資料から求められたものであるから，それは一雨の期間内での異なる継続時間に対する雨量間の相関関係を再現することができない．言い換えれば，作成されたハイエトグラフにおける各継続時間の雨量は同一の確率年を有するが，相互の同時生起性，つまり，時系列特性は考慮されずに並べられている．同時生起確率を考慮すれば，この波形が生起する確率は用いた確率降雨強度曲線の超過確率よりも低い値であると考えられる．

一方，近年，貯留・調節施設を複合した治水計画や排水計画が，一般的になってきており，雨水排除対策はピーク流量のみを対象とする流下対策からハイドログラフ全体を対象とする流下・貯留対策へと変化してきている．貯留・調節施設を計画・評価するために計画降雨波形の確率的意味付けを明確にする必要がある．

2．降雨波形を考慮した確率降雨モデル　降雨波形の確率的意味付けが明確な確率降雨の作成方法を確立するために，降雨の確率分布特性や統計的解析理論に関する研究が続けられている[1)~3)]．十分満足し得る結果にはまだ至っていないが，より有効な確率降雨を作成するために，1) 短時間降雨の分布に適合性のより高い確率分布モデルの採用，2) 単位時間降雨量の同時生起性の考慮および 3) 単位時間降雨強度だけでなく，降雨波形を確率評価することが重要であることが分かった．本研究では，これらの結果を踏まえて確率降雨の作成方法を提案した．

降雨波形は離散的降雨強度（$r_1, r_2, \cdots, r_n$）で表されるものとする．ただし，$i=1, 2, \cdots, n$ は△t で等分割された離散時間を表す．単位時間降雨量 r_i の分布にガンマ分布を採用する．ガンマ分布は，その取扱いが非常に難しいが，水文統計の立場から正規分布に続いて重要な応用面を持つ連続分布であり，密度分布形における非対称性を基礎にしたものといえる．この分布は，母数の選択に応じて正規分布に近い形から，指数分布などの逆Ｊ字型のような非対称分布に至る非常に広範囲の形を網羅しており，しかも下限値を持つことから，気象統計，人口統計などで極めて有効と目されている．たとえば，各種継続時間に対する降水量分布，特に短時間降水量分布がこれに従う報告が多い[2)]．

単位時間降雨量を$(r_i, i=1,2,\cdots,n)$と記せば，降雨波形の分布は，確率変数$(r_i, i=1,2,\cdots,n)$ の結合分布となる．ここでは，その確率密度関数を$f_{(r_1,r_2,\cdots,r_n)}(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ と記す．明らかに，単位時間降雨量$(r_i, i=1,2,\cdots,n)$ を確率変数として扱う場合に，r_s と r_t $(s \neq t)$は独立ではない．また，確率変数$(r_i, i=1,2,\cdots,n)$ がガンマ分布に従うとすれば，降雨波形の分布の確率密度関数$f_{(r_1,r_2,\cdots,r_n)}(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ がｎ次元ガンマ密度関数となる．従って，再現期間（計画規模）がＴ年の確率降雨強度は厳密に次のように定義される．

$$\int_0^{r_i} f_{r_i/r_1\cdots r_{i-1}r_{i+1}\cdots r_n}(r_i/r_1\cdots r_{i-1}r_{i+1}\cdots r_n)dr_i = 1+\frac{1}{T} \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

ただし，$f_{r_i/r_1\cdots r_{i-1}r_{i+1}\cdots r_n}(r_i/r_1\cdots r_{i-1}r_{i+1}\cdots r_n)$は$(r_1\cdots r_{i-1}r_{i+1}\cdots r_n)$が与えられたときの r_i の条件付き確率密度関数である．

ｎ次元ガンマ分布確率密度関数あるいはその条件付き確率密度関数を定義するために重相関係数や偏相関係数が必要になるため，その取扱い方は数学的にはまだ確立されていない．浅田[3)]や Zhang ら[4)]は，単位時間降雨量の相関および同時生起可能性をできるだけ考慮することと，確率降雨の総降雨量を正確に評価することを制約条件に，上式を次のように近似できることを示した．

$$\int_0^{R_n} f_{R_n}(R_n)dR_n = 1+\frac{1}{T} \qquad \int_0^{R_i} f_{r_i/R_i}(r_i/R_i)dr_i = 1+\frac{1}{T}\ ,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

ただし，$R_i=R_{i-1}+r_i$, i=1, 2, ・・・, n. $f_{Rn}(R_n)$は累積総降雨量R_nの確率密度関数，　$f_{ri/Ri}(r_i/R_i)$は累積降雨量R_iが与えられたときのr_iの条件付き確率密度関数である．

降雨時系列の自己相関係数に関する弱定常性の仮定（この仮定の正当性については，従来の研究[2]によれば，ほとんど問題はない）のもとで条件付き確率密度関数$f_{ri/Ri}(r_i/R_i)$が解析的に得られる．以下，その結果を示す．

$$f_{r_i/R_i}(r_i/R_i) = f_{R_i r_i}(R_i,r_i)/f_{R_i}(R_i) \tag{3}$$

$$f_{R_i}(R_i) = \frac{1}{\sigma(R_i)\Gamma(\nu(R_i))}\left(\frac{R_i}{\sigma(R_i)}\right)^{\nu(R_i)-1}\exp\left\{-\frac{R_i}{\sigma(R_i)}\right\} \qquad 0\le R_i\le+\infty\ ,\ i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

$$f_{R_i r_i}(R_i,r_i) = \left[\Gamma(n)\Gamma(m)\left\{\sigma(R_i)\sigma_i\right\}^{\frac{n+1}{2}}\sigma_i^m(1-\delta)\delta^{\frac{n-1}{2}}\right]^{-1}\left(R_i r_i\right)^{\frac{n-1}{2}} r_i^m \exp\left\{\frac{-r_i}{\sigma_i(1-\delta)}+\frac{-R_i}{\sigma(R_i)(1-\delta)}\right\}\bullet$$
$$\int_0^1 (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{m-1}\exp\left\{\frac{\delta r_i t}{\sigma_i(1-\delta)}\right\} I_{n-1}\left(\frac{2\sqrt{\delta}}{1-\delta}\sqrt{\frac{r_i R_i}{\sigma_i\sigma(R_i)}(1-t)}\right)dt \quad ,\ 0\le R_i\le\infty,\ 0\le r_i\le R_i\le\infty,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

ただし，

$$E\{r_i\}=\nu_i\sigma_i\ ,\quad Var\{r_i\}=\nu_i\sigma_i^2\ ,\quad E\{R_i\}=\sum_{j=1}^{i}\nu_j\sigma_j\ ,\quad Var\{R_i\}=\sum_{j=1}^{i}\nu_j\sigma_j^2+2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=j+1}^{i}\sqrt{\nu_j\sigma_j^2\nu_k\sigma_k^2}\,\gamma^{k-j}$$

$$\nu(R_i)=\frac{\left[E\{R_i\}\right]^2}{Var\{R_i\}}\ ,\quad \sigma(R_i)=\frac{Var\{R_i\}}{E\{R_i\}}\ ,\quad \delta=\delta(r_i,R_i)=\frac{E\{(R_i-E\{R_i\})(r_i-E\{r_i\})\}}{\sqrt{Var\{R_i\}Var\{r_i\}}}=\frac{\sum_{j=1}^{i}\sqrt{Var\{r_j\}Var\{r_i\}}\,\gamma^{i-j}}{\sqrt{Var\{R_i\}Var\{r_i\}}}$$

ここに，ν_iとσ_iはそれぞれ単位時間降雨量の形状母数と尺度母数，$\nu(R_i)$ =n+m，ν_i =n（n，m ≧ 0)，$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数，　γは降雨量時系列の自己相関係数，$I_{n-1}(\cdot)$は(n-1)次の第１種変形Bessel関数である．

以上，確率降雨モデルを示した．本モデルにより決定された確率降雨は，単位時間降雨量と降雨波形（時間分布）が同一の生起確率をもつ．提案した確率降雨モデルは連立積分方程式から構成されており，これを解くためには反復計算と数値積分（Gauss-Legendreの数値積分公式，定積分の分点が20点）を用いた．

東京都中央気象台における1973年から1992年まで20年間の5分降雨量データを用いて提案したモデルと従来の確率降雨強度曲線法による確率降雨を比較・検討した結果，従来の手法では，再現期間が3年および5年の短い降雨では，降雨規模全体を大きく評価し，再現期間が10年以上の降雨では，ピーク降雨強度を大きく，累積総降雨量を小さく評価している．つまり，非常にシャープな降雨波形を与えていることが分かった．これは従来の手法が実績降雨波形（一連の降雨の同時生起性）を考慮していないことによるものと思われ，従来の指摘とも一致している．

３．まとめ　本稿で提案した確率降雨モデルの特徴としては，単位時間降雨量に高い適合性を示している被共通の2母数ガンマ分布を採用したこと，単位時間降雨量の同時生起可能性を考慮したこと，そして，これらの結果として確率降雨における降雨強度の生起確率とその時間分布の生起確率が一致する理論的保証が得られたことが挙げられる．今後，適用事例を増やすことにより，モデルの一般的有効性を実証していくことが必要である．

〈参考文献〉　1) 端野道夫(1986)：計画降雨波形の確率論的定式化と条件付き確率降雨強度式の提案，土木学会論文集，369，139-146.　2) 長尾正志(1975)：確率雨量配分率曲線の理論的推定，土木学会論文集，243，33-46.　3) 浅田一洋(1995)：都市水文と下水道雨水排水施設の量的評価に関する研究，京都大学学位論文.　4) Zhang, S.P., K.Asada and Y.Hagihara(1996)：Development of urban design storms by considering temporal rainfall distribution, Proc. of the 7th Int'l Conf. on Urban Storm Drainage (forthcoming).