

II-162

粒径分布を有する土粒子の空隙分布の確率論的解析

北見工業大学 正員 中尾隆志
北海道大学 正員 藤田睦博

1. まえがき 著者らは体積含水率とサクシヨンの関係を理論的に求めることを最終目的に土粒子を球形と仮定し、2球間のリング水の保水効果について解析を行ってきた。これまでの研究成果により、リング水の保水効果は土粒子の粒径比および土粒子構造(fabric)に強く影響を受ける事が判明した¹⁾。従って、本モデルを実際の土壌に対して適用するには土粒子の空間分布を明らかにしなければならない。粒子半径の確率密度関数 $N(r)$ を既知とし、空間に球形粒子がランダムに配列されることを考慮すると、粒子間距離 δ もまた確率変数となり、リング水の体積 V も確率変数となる。本論文は V の確率密度関数とそのパラメータを理論的に推定することを目的にしている。このためには、粒子間距離 δ の確率特性を知ることが必要となる。

2. 基礎理論 δ の確率密度関数やそのパラメータを直接求めることはきわめて難しい。ここでは空間にランダムに配置された球形粒子を任意の試験平面で切断し、試験平面上に現れる円形断面の解析を介して δ の確率特性を推定する手法を採用する。粒子半径 r_1, r_2 からなる球と試験平面に表れる円の半径をそれぞれ R_1, R_2 とすると

$$(r_1 + r_2 + \delta) \sin \theta = R_1 + R_2 + l \quad (1)$$

ここに、 θ は2球の中心と試験平面の法線方向のなす角であり、 l は試験平面上の円間距離である。従って、 R の確率密度関数 $f_1(R)$ は

$$f_1(R) = \frac{R}{\bar{r}} \int_R^{\infty} \frac{N(r)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr \quad (2)$$

$$\text{但し、} \bar{r} = \int_0^{\infty} r N(r) dr$$

式(1)において、 $Z_1 = r_1 + r_2$ 、 $Z_2 = R_1 + R_2$ とすると Z_1, Z_2 の確率密度関数 $f_2(Z_1), f_3(Z_2)$ は

$$f_2(Z_1) = \int_0^{\infty} N(r) N(Z_1 - r) dr、$$

$$f_3(Z_2) = \int_0^{\infty} f_1(R) f_1(Z_2 - R) dR \quad (3)$$

また、式(1)において、 θ は粒子が空間にランダムに配列されていることを考慮するならば、 θ は一樣分布で与えられる。 $\Theta = \sin \theta$ とすると、 δ は次式で表される。

$$\delta = \frac{1}{\Theta} (Z_2 + l) - Z_1 \quad (4)$$

したがって、 l の確率密度関数がわかると式(4)の右辺の量の全ての確率密度関数が既知となり、 δ の確率密度関数が得られる。

3. l の確率密度関数の推定法 空間にランダムに配列されている球を任意の試験平面で切断して試験平面上に表れる円形断面は平面上に半径 R の確率密度関数が $f_1(R)$ で与えられる円をランダムに配置した図形に置換できる。この平面上に任意の直線を引き、この直線が切り取る弦長 $y_1, y_2, \dots$ の確率密度関数を求めると、式(2)と同様な誘導法で次式を得る。

$$f_6(y) = \frac{y}{2\bar{R}} \int_{y/2}^{\infty} \frac{f_1(R)}{\sqrt{4R^2 - y^2}} dR、$$

$$\bar{R} = \int_0^{\infty} R f_1(R) dR \quad (5)$$

今、平面上の2個の円に注目すると図1のように表すことができ、次の関係式を得る。

$$(R_1 + R_2 + l) \cos \alpha = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) + x \quad (6)$$

円が平面上に任意に配列していることを考慮すると、

$$f_7(A) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - A^2}}, \quad A = \cos \alpha \quad (7)$$

$Z_2 = R_1 + R_2$ の分布は式(3)で与えられる。また、

$Z_3 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)$ の分布 $f_8(Z_3)$ は

$$f_8(Z_3) = \frac{\pi}{2} Z_3 \int_{Z_3/2}^{\infty} f_1(r) dr \quad (8)$$

となる。したがって、

$$I = \frac{1}{A} (Z_3 + X) - Z_2 \quad (9)$$

となり、 x の確率密度関数が与えられると1の確率密度関数を誘導することができる。

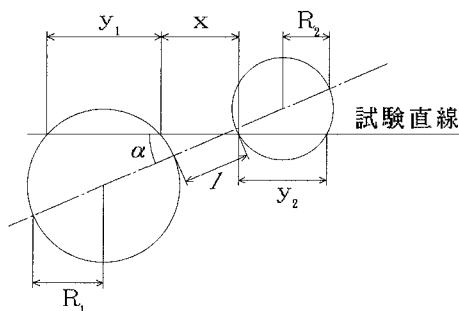


図1 2円が試験直線で切られた時の距離関係

4. x の確率密度関数の推定法 平面上に長さ L の直線を引き、この直線上に n 個の円が横切るとき、

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \sum_{i=1}^n y_i = \bar{X} + Y \quad (10)$$

X , Y の平均値、分散を $\bar{X}$, $\bar{Y}$, σ_X^2 , σ_Y^2 とすると、次の関係式を求めることができる。

$$\bar{X} = L - \bar{Y}, \sigma_X = \sigma_Y \quad (11)$$

同様に、 n , y の平均値、分散から以下の関係式を導くことができる。

$$\bar{Y} = n\bar{y}, \sigma_Y^2 = n\sigma_y^2 + \sigma_n^2 \bar{y}^2 \quad (12)$$

諏訪²⁾は病理細胞の統計的解析法として、式(5)と同様な方法で y の確率密度関数 $f_{10}(y)$ を誘導しているが、紙面の関係で省略する。

また、 $m=n-1$ に関して、

$$\bar{m} = \bar{n} - 1, \sigma_m = \sigma_n \quad (13)$$

なる関係が得られ、式(12), (13)より

$$\bar{X} = \frac{L - \bar{n}\bar{y}}{\bar{n} - 1}, \sigma_X^2 = \frac{\bar{n}\sigma_y^2 + \sigma_n^2 \bar{y}^2 - \sigma_n^2 \bar{X}^2}{\bar{n} - 1} \quad (14)$$

5. シミュレーション法による検討 上記の方法を検証するため以下の方法によりコンピュータシ

ミュレーションを行った。200*200の領域に空隙率 $\lambda = 0.5$ 、円の半径の平均が0.5の指数分布を持つ円をランダムに発生させる。得られた円の内、さきに発生した円に重なり合うものは棄却し、所定の λ になるまでこの計算を繰り返す。図2に得られた円の半径の相対度数とその確率密度関数を示す。 r の分布は指数分布からガンマ分布に変化しており、以後 $N(r)$ としてこの分布型を用いることとする。任意の円に着目し、この円と隣接するすべての円の粒子間距離 $(Z_1 + \delta)$ を計算し、この分布径を求めたところ、半径の分布と同様に、ガンマ分布が得られた。

表1は $L=100, 200$ としたときの式(11)で得られる $\bar{X}$ の理論解とシミュレーションから得られた実測値の比較を行っているが、理論値はシミュレーション結果とよく適合している。

今後は、式(12)中の $\bar{n}$ について $N(r)$ で表す方法にを検討することが課題である

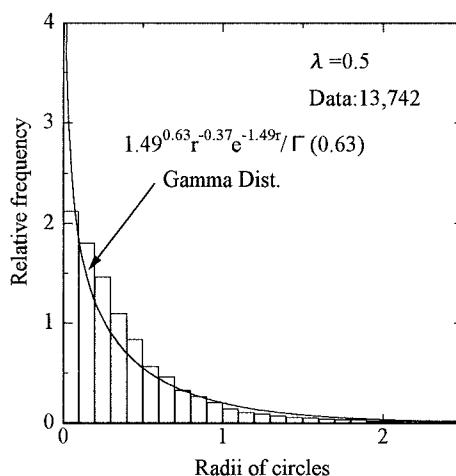


図2 シミュレーションに用いた円の半径分布

表1 理論解とシミュレーション法の $\bar{X}$ の比較

L	理論解	シミュレーション結果
100	100.854	100.600
200	48.708	48.838

参考文献

- 1) Nakao T. et al.: Retained Water in Soil Based on Probabilistic Pore Structure, Environment International, Vol 21., No. 5, pp. 711-716, 1995.
- 2) 諏訪紀夫: 定量形態学, 岩波書店, 1977.