II-145 下水管鉛直縦シャフト管内の流れについての考察

東洋大学工学部環境建設学科　フェロー員　荻原　国宏
東洋大学工学部環境建設学科　正　　　員　田中　修三

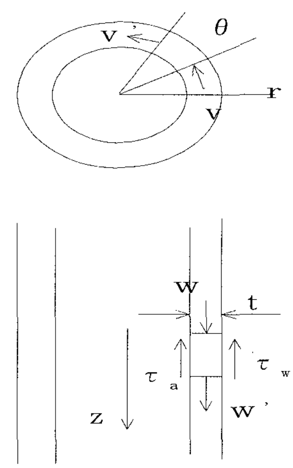
図－１のように回転方向と鉛直方向が主流となっている流れを考える。ｒ方向の流れは無視するとして外力として重力ｇ、圧力ｐ、内部摩擦力、壁面摩擦力、空気との間の摩擦力τを考える。

水脈内の流速は一様であり、断面内での速度のθ方向の変化は無視できると考える。さらに内部摩擦力は壁面と空気面との摩擦力に比べて無視できるとする。運動方程式は

$$w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{w\theta}+\tau_{a\theta}}{t}$$

$$w\frac{\partial w}{\partial z}=g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{wz}+\tau_{az}}{t} \qquad (1)$$

となり、連続の式は　$\dfrac{\partial (wt)}{\partial z}=0,\quad wt=q$　(2)



図－１

となる。また壁面と空気面での摩擦力はそれぞれ次の様に表す。

$$\tau_{w\theta}=f_w\frac{\rho v^2}{2},\tau_{a\theta}=f_a\frac{\rho v^2}{2},\tau_{wz}=f_w\frac{\rho w^2}{2},\tau_{aw\theta}=f_a\frac{\rho w^2}{2} \qquad (3)$$

さらに圧力ｐは断面内では空気の圧力と同じであると仮定し、空気が定常的に流れている事を考慮すると

$$\frac{\partial p}{\partial \theta}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g I \qquad (4)$$

と書ける。ここにＩは圧力勾配である。空気の場合には重力の分は無視出来るとする。これらの関係式を使って運動方程式を書き直すと

$$w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{w\theta}+\tau_{a\theta}}{t},\quad w\frac{\partial w}{\partial z}=g(1+I)-\frac{1}{\rho}\frac{\tau_{wz}+\tau_{az}}{t} \qquad (5)$$

第１式をまず解く。この式に連続の式と壁面摩擦力の式を代入し、積分し z=0 で速度 v_0 として積分常数を決めると速度を与える式として次の式が求められる。

$$v=\frac{v_0}{1+\left(f_w+f_a\right)\dfrac{v_0 z}{2q}} \qquad (6)$$

方程式の第２式を書き直し、$a=g(1+I),\ b=\dfrac{f_w+f_a}{2q}$ と置き、書き直し部分分数分解して積分する。ここで

$$Y\left(\frac{w}{a'}\right)=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{w}{a'}+\frac{1}{2}\right)+\ln\frac{\left(1+\dfrac{w}{a'}+\left(\dfrac{w}{a'}\right)^2\right)}{\left(\dfrac{w}{a'}-1\right)^2}\right] \qquad (7)$$

と置き,z=0,w=w_0 の条件で積分常数を決めると解が求められる。

$$z=\frac{1}{6a'b}\left[Y\left(\frac{w}{a'}\right)-Y\left(\frac{w_0}{a'}\right)\right],\qquad a'b=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}b=\sqrt[3]{ab^2}=\sqrt[3]{\frac{g(1+I)\left(f_w+f_a\right)^2}{4q^2}} \qquad (8)$$

また速度が一定になる条件は

$$w_e = \sqrt[3]{\frac{2g(1+I)q}{f_w + f_a}} \tag{9}$$

となる。次に空気の流速と流量についてまとめて置こう。摩擦力と圧力勾配の関係と摩擦力の定義の式から、空気の速度が求められ,さらに空気の輸送量が求められる。従って空気の流量は

$$Q_a = \frac{\pi(r-t)^2}{4} w_a = \frac{\pi(r-t)^2}{4}\sqrt{\frac{\rho g I(r-t)}{\rho_a f_a}} \tag{10}$$

となる。次に水と空気の流量について考察しよう。　水の流量は単位幅当たり q で与えられているので、管全体では　$Q_w = 2\pi(r-t)q$　となる。空気との流量比は

$$\frac{Q_a}{Q_w} = \frac{(r-t)}{8q}\sqrt{\frac{\rho g I(r-t)}{\rho_a f_a}} \tag{11}$$

となる。最終速度近くになると t は r に比べて無視できるので、 r を直径Dで表して

$$\frac{Q_a}{Q_w} = \frac{\sqrt{D}^3}{16q\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho g I}{\rho_a f_a}} = \frac{\sqrt{D}^5\sqrt{g}}{Q_w 16\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho I}{\rho_a f_a}} \tag{12}$$

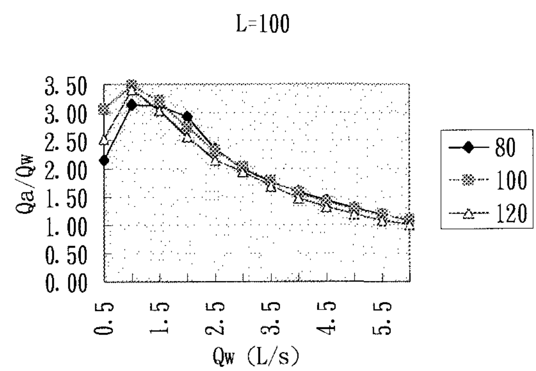
となる。この式の $\frac{\sqrt{D}^5\sqrt{g}}{Q_w}$ は froude の相似則の流量のパラメーターを表している。そこでこの式を書き直すと

$$\frac{Q_a}{Q_w} = \frac{1}{\overline{Q_w}}\frac{1}{16\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho I}{\rho_a f_a}}, \quad \overline{Q_w} = \frac{Q_w}{\sqrt{D}^5\sqrt{g}} \tag{13}$$

となる。従って空気と水の流量比は流量のパラメーターに逆比例し、圧力勾配Ｉの０．５乗に比例していることが判る。但し圧力勾配は水の場合と異なって必ずしも管路全体で一様にはならないことが想定される。水が水脈になっている場合と、飛沫になっている場合では異なるであろう。

実験結果の一例を図－２．１と図－２．２に示す。図－2.1 はパイプ長が 100cm の場合での結果をパイプ径をパラメーターにして、空気と水の流量比を水の流量との関係でまとめたものである。水の流量が増加するに従って流量比は減少して行くことが判る。

図－2.2 は式(13)にあわせた形で、フルードの流量縮尺比との関係でグラフにしたものである。QwBAR と書いてあるのは式(13)の第２式で与えられるパラメーターである。このグラフの３本の曲線はパイプの長さの相違を表しているが、大きな差が生じていないことが判る。この研究は平成７年度の文部省科学研究費一般Ｂの援助を受けました。謝意を表します。



図－２．１↑　　　　図－２．２↓