

1. はじめに

スロッシング現象などのように、大規模な自由液面の変動を伴う流動現象は、従来非粘性および非回転流動を仮定したポテンシャルモデルにより数値計算されることが多かった。本研究では、自由液面の変動を伴う2次元場の流動現象を精度良く数値解析するため、流体運動の支配方程式としてナビエ・ストークス式を利用するとともに、ALE法[1]に基づき、各計算ステップごとに境界適合座標系を生成して[1]、非定常的に変化する自由液面形状を適切に表現する計算手法を提案する。そして、この数値解析手法の適用性を検討するため、2次元場における粘性・非粘性流体の液面の自由振動、液面に圧力パルスを与えた場合の非線形液面変動の数値解析を行い、いずれに対しても妥当な数値解析結果が得られること示す。

2. 数値解析手法

ある時刻に与えられた自由液面形状を境界条件として、以下の関係式を用いて境界適合座標系を各計算ステップごとに生成し、計算点の再配置を行う[2]。

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_p \partial \xi_q} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_p}{\partial x_j} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_q}{\partial x_j} \right)^* + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} \right)^* \left(\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \right)^* + P_m \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} \right)^* = 0 \quad (1)$$

ここで、 x_i 、 ξ_m 、 P_m は、それぞれ物理空間と写像空間中の座標成分、コントロールファンクションを表す。

流体の運動方程式は、写像空間中において、以下のように表現される。

$$\frac{D u_i}{D t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + F_i + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \right) \quad (2)$$

ここで、 u_i 、 p 、 F_i 、 ρ 、 ν は、それぞれ x_i 方向の流速成分、圧力、重力などの外力、流体の密度、動粘性係数である。(2)式中の左辺の微分作用素は、以下のように表される。

$$\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + (U_m - U_{0m}) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \quad (3)$$

ここに、 U_m と U_{0m} は、それぞれ流体の流速と計算点の移動速度の反変成分で、写像空間中の時間 τ は物理空間中のそれと等しくおいている。自由液面に対しては、次式で表される動的境界条件

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (U_{Sm} - U_{0Sm}) \frac{\partial h}{\partial \xi_m} = u_{S3} \quad (4)$$

および、応力条件

$$n_i \sigma_{ij} n_j = S k \quad (5) \quad \tau_i \sigma_{ij} n_j = 0 \quad (6) \quad \sigma_{ij} = -p_0 \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

が、写像空間中において満足されるものとした。(4)式で、添字Sは、水表面上の変数であることを表す。(5)、(6)式の n_i と τ_i は、液面の法線方向および接線方向の単位ベクトル、(7)式中の μ は粘度を表す。また、本研究の数値解析では、表面張力係数と曲率の積である(5)式右辺と、(7)式中の大気圧 p_0 を0とおいている。

3. 数値解析手法の適用性

(1)粘性・非粘性流体の自由振動：図1に示すように、下方に向かって1.0の重力が作用する、2次元矩形容器内の流体に対して、時刻0で次式の液面形を与える。

$$h = 1.0 + 0.01 \sin[\pi(0.5 - x_1)] \quad (8)$$

容器両端における液面変位の時系列を図2、3に示す。図2は非粘性流体に対する結果で、時間が経過しても振幅や周期がほぼ一定であることから、流体の連続性や運動量の保存性が良好に満足されていると考えられる。また、図3は、 $\nu = 0.01$ 、側面および底面上で流速が0であるという条件の下に得られた粘性流体に対する結果を示すものであり、液面変動の減衰などに関して、Ramaswamy[3]と良く一致する計算結果が得られている。

(2)圧力パルスが作用したときの非線形液面変動：幅4.8の2次元矩形容器内にある水深4.0の静止流体に重力1.0が下向きに作用する場を考える。座標系は図1と同様である。この流体の液面に、次式で定義される圧力が作用するものとする。

$$p_0(t) = 1.0 \delta(t) \cos(\pi x_1 / 4.8) \quad (9)$$

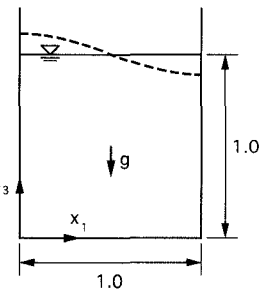


図1 矩形容器と座標系

ここで、 $\delta(t)$ は、ディラックのデルタ関数である。 $\nu = 0.01$ の条件の下で計算を行い、容器両端の液面高さの時間変化を図4に示すように求めた。図4に示されるように、スパイク側の波高がバブル側の液面低下より大きくなるという、非線形的な液面変動が計算されており、その結果はHarlow&Welch[4]の解析結果とほぼ一致するものとなっている。図5、6には、この計算で得られた解析メッシュの分布と流速ベクトルの分布を示す。

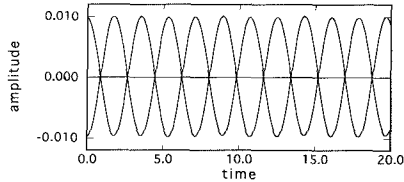


図2 非粘性流体の液面変動

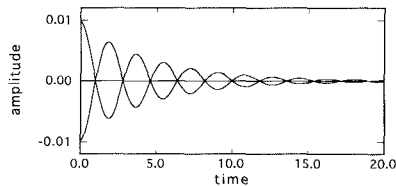


図3 粘性流体の液面変動

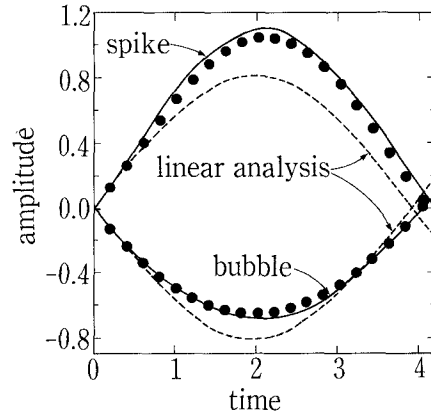


図4 非線形液面変動
(●本研究の解析結果、一文献[4]の結果)

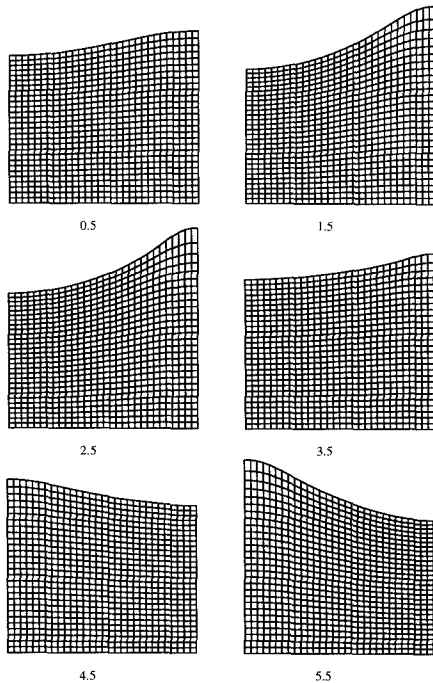


図5 解析メッシュの分布（数値は時刻）

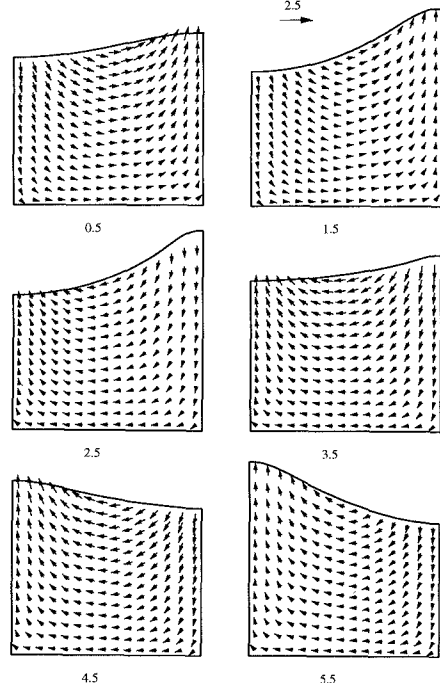


図6 流速ベクトルの分布

4. おわりに

本研究では、自由液面の変動を伴う2次元場の流動現象を精度良く数値解析するため、ALE法に基づき、各計算ステップごとに境界適合座標系を生成して自由液面形状を表現する計算手法を提案した。粘性・非粘性流体の液面の自由振動、非線形液面変動の数値解析を行い、妥当な数値解析結果が得られることが示された。

《参考文献》 [1] S. Ushijima, Journal of Computational Physics, vol.125, No.1, 1996 (to be published).

[2] S. Ushijima, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.19 1994. [3] B. Ramaswamy, Journal of Computational Physics, 90, 1990. [4] F. H. Harlow and J. E. Welch, Physics of Fluids, Vol.9, No.5, 1966.