

II-132

MacCormack法を用いた水制工まわりの数値計算

九州工業大学大学院 学生員 ○山口 学、サニット ウォンサ
同 上 正 員 秋山 壽一郎、浦 勝

1. はじめに

本研究は、MacCormack法にJamesonの人工粘性と4ステップアルゴリズムを組み込んだ平面2次元非定常流数値モデルを構築し、水制工まわりの流況に関する既存の実験結果と比較・検討を行ない、その予測精度について定量的に調べたものである。

2. 2次元洪水数値モデル

2次元浅水流方程式の保存形の連続の式および運動方程式は、式(1)のように与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{S} = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\text{ただし、} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}; \mathbf{E} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + 0.5gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + 0.5gh^2 \end{bmatrix}; \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ -gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{bmatrix}$$

ここに、 x, y =流下方向、幅方向距離、 h =水深、 $u, v=x, y$ 方向の流速、 g =重力加速度、 $S_{ox}, S_{oy}=x, y$ 方向の河床勾配である。また、 $S_{fx}, S_{fy}=x, y$ 方向の摩擦勾配であり、それぞれ式(2)のように与えられる。

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}; \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad \cdots (2)$$

ここに、 n =Manningの粗度係数である。

MacCormack法は、式(3)の予測子段階と式(4)の修正子段階よりなる2段階ステップの2次精度スキームであるが、本平面2次元非定常流モデルでは、差分の方向を決めるためのパラメータ α, β を導入し、任意の計算時間ステップのアルゴリズムを次のように表わす。

$$\mathbf{U}_{ij}^p = \mathbf{U}_{ij}^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (1-\alpha) \mathbf{E}_{i+1,j}^t - (1-2\alpha) \mathbf{E}_{ij}^t - \alpha \mathbf{E}_{i-1,j}^t \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ (1-\beta) \mathbf{F}_{i,j+1}^t - (1-2\beta) \mathbf{F}_{ij}^t - \beta \mathbf{F}_{i,j-1}^t \right\} - \Delta t \mathbf{S}_{ij}^t \quad \cdots (3)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^c = \mathbf{U}_{ij}^p - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (1-\alpha) \mathbf{E}_{i+1,j}^p - (1-2\alpha) \mathbf{E}_{ij}^p - \alpha \mathbf{E}_{i-1,j}^p \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ (1-\beta) \mathbf{F}_{i,j+1}^p - (1-2\beta) \mathbf{F}_{ij}^p - \beta \mathbf{F}_{i,j-1}^p \right\} - \Delta t \mathbf{S}_{ij}^p \quad \cdots (4)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{t+1} = 0.5(\mathbf{U}_{ij}^t + \mathbf{U}_{ij}^c) \quad \cdots (5)$$

ここに、 $\Delta x, \Delta y=x, y$ 方向の刻み幅である。また、 p および c の添え字は、それぞれ予測子と修正子を意味する。また、 $\alpha = \beta = 0.0, 1.0$ の時がそれぞれ前進差分、後退差分となる。 Δt は、Courant-Friedrich-Levy(CFL)の安定性条件に基づき、式(6)のように与えられる。

$$\Delta t = \frac{\Delta x Cr}{\max(|u| + |v| + \sqrt{2gh})} \quad \cdots (6)$$

ここに、 Cr =Courant数である。

さらに、数値振動を抑えるため、式(7)、(8)に示すJameson(1971)の人工粘性係数 k を用いた。つまり、式(5)で求められた $\mathbf{U}_{ij}^{t+1}$ は、最終的に式(9)で補正される。

$$\xi_{ij}^x = \frac{|h_{i+1,j} + 2h_{ij} + h_{i-1,j}|}{|h_{i+1,j}| + |2h_{ij}| + |h_{i-1,j}|}; \quad \xi_{ij}^y = \frac{|h_{i,j+1} + 2h_{ij} + h_{i,j-1}|}{|h_{i,j+1}| + |2h_{ij}| + |h_{i,j-1}|} \quad \cdots (7)$$

$$\xi_{i+1/2,j}^x = k \max(\xi_{ij}^x, \xi_{i+1,j}^x); \quad \xi_{i+1/2,j}^y = k \max(\xi_{ij}^y, \xi_{i+1,j}^y) \quad \cdots (8)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{t+1} = \mathbf{U}_{ij}^{t+1} + \left[\xi_{i+1/2,j}^x (\mathbf{U}_{i+1,j}^{t+1} - \mathbf{U}_{ij}^{t+1}) - \xi_{i-1/2,j}^x (\mathbf{U}_{ij}^{t+1} - \mathbf{U}_{i-1,j}^{t+1}) \right] + \left[\xi_{i,j+1/2}^y (\mathbf{U}_{i,j+1}^{t+1} - \mathbf{U}_{ij}^{t+1}) - \xi_{i,j-1/2}^y (\mathbf{U}_{ij}^{t+1} - \mathbf{U}_{i,j-1}^{t+1}) \right] \quad \cdots (9)$$

3. 解析結果

計算領域は、長さ7.00m×幅0.40mの長方形水路の中に長さ0.20m×幅0.10mの不透過性水制工を流入点から2.00m下流に設置したものである。計算においては、上・下流端の全幅にわたって開境界として流入・流出を行った。計算条件を表1に示す。

表1 計算条件

S_{ox}	0.04
n	0.01
q (m ² /s)	0.0132
$\Delta x, \Delta y$ (m)	0.05
Cr	0.50
k	0.10

水制工まわりの水深 h と流速ベクトル (u, v) について実験値(永瀬、1995)と計算値との比較を行ったものがそれぞれ図1および2である。実験結果においては、水制工の上流側で跳水現象がみられるが、計算結果はやや拡散しているもののこのような流況を再現していることがわかる。一方、水制工の下流側の水面形に着目すると、流れが水制工の下流側に回り込むように大きく方向を変え、水路側壁で一端反射をした後、再び反対側に向かっていく様子が再現されていることがわかる。以上のことより、本モデルは常・射流が混在した複雑な流れを良好に再現できることがわかった。

参考文献：【1】 Jameson et al.(1971), AIAA 14th Conf.、【2】 永瀬ら(1995), 第50回年講。

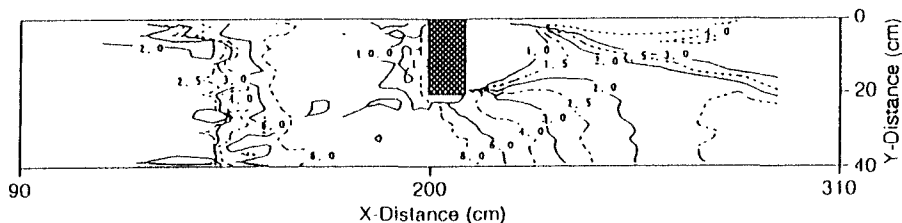


図1-a 水制工付近の等水深図(実験値)

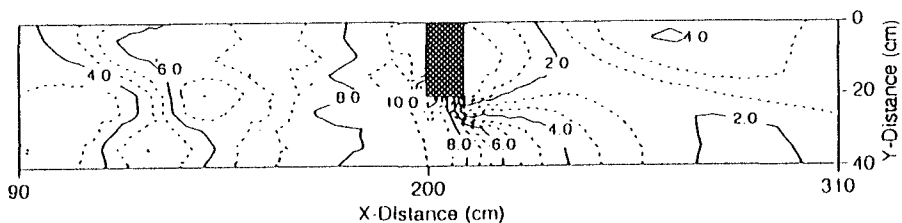


図1-b 水制工付近の等水深図(計算値)

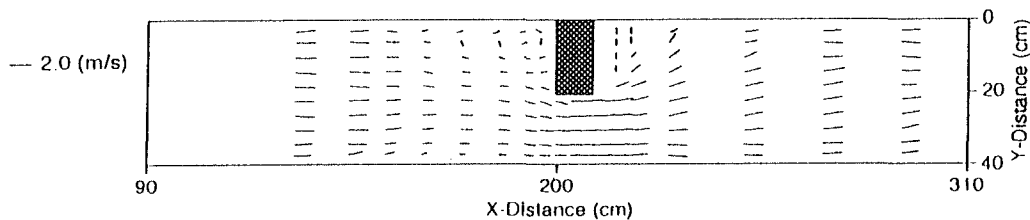


図2-a 水制工付近の流速ベクトル図(実験値)

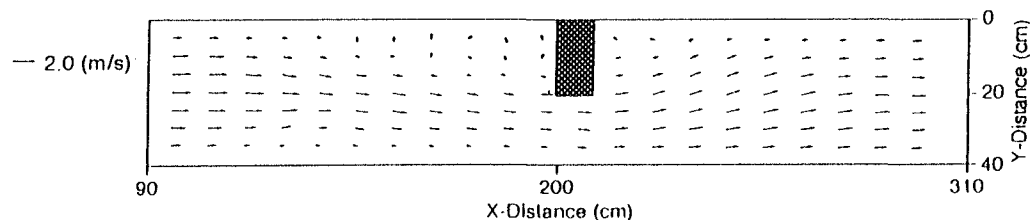


図2-b 水制工付近の流速ベクトル図(計算値)