土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

II-121　氾濫計算を安定に行うための先端条件の検討

東北大学大学院　学生員○今津雄吾
東北大学工学部　正　員　今村文彦
東北大学工学部　正　員　首藤伸夫

1．はじめに

河川氾濫の非定常数値解析を安定に行うためには、波動方程式に対するC.F.L.条件に加えて、移動境界である流れ先端部での安定条件が必要であり、水深が小さい地点においてある程度の大きさの水深で代用する仮想水深法、あるいは水深を零とみなして計算を実行しない打ち切り水深法が用いられている。

しかし、計算の安定性の観点から先端条件を決定する基準は与えられておらず、理論的根拠の乏しい経験的な値を用いているのが現状である。そこで、１次元のモデル水路で数値計算を行って発散のメカニズムについて考察し、さらに、先端での安定条件を理論的に与える試みを行った。

2．Leap-frog法による数値計算法

氾濫計算には、浅水理論式をLeap- fr og法により差分化して用いられるが、その運動方程式（１次元）は次の様になる。

$$M(k+1)=\frac{1}{1+FF}\left\{(1-FF)M(k)-\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M^2(k)}{D(k)}\right)-\Delta t g D(k)\frac{\partial \eta(k)}{\partial x}\right\} \qquad (1)$$

ただし

$$FF=\frac{1}{2}\frac{gn^2\Delta t}{D(k)^{7/3}}|M|$$

M：流量Flux,　D：全水深,　η：水位+ 地盤高さ
k：時間ステップ,　n：Manning の粗度係数,　g：重力加速度

FF（摩擦項）及び移流項の計算では、D（全水深）で除する演算を行うため、水の先端などで微小なDが発生すると摩擦項や移流項が極端に大きくなり、このスキーム自体は安定であっても、発散する可能性がある。よって、計算を継続するためには流れの先端条件が必要である。先端条件として最も一般的に用いられているのは、仮想水深(h_a)や打ち切り水深(h_c)を用いる方法である。

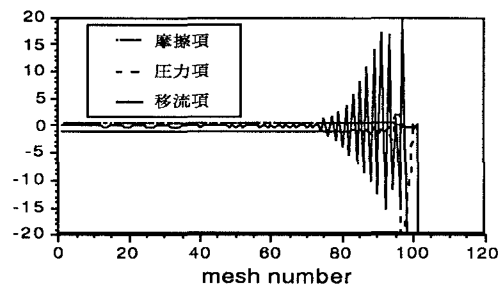

図１　各項の大きさの比較

3．発散例の考察

一様勾配の水路に上流側境界から、１（m）の水位を与えて水を流した。発散を起こした例として、仮想水深$h_a = 1.0\times10^{-5}$ (m)、打ち切り水深$h_c = 1.0\times10^{-7}(m)$を併用し,勾配$i$=10％の時の計算結果について以下に示す。図1は、発散直前（計算開始後44秒）での運動方程式中の各項の大きさを比較したものである。これを見ると移流項が振動を起こして、極端に値が大きくなり発散していることが分かる。逆に、摩擦項は最も安定している。しかし、図2の様にFFのみを出力すると、移流項が振動を起こす前(t=36sec)から水の先端で大きな値が現れていることが分かる。増幅率として$M(k)$の係数$\alpha=(1-FF)/(1+FF)$を考えた場合には、必ずαの絶対値は１以下になり、摩擦項が直接発散することはない。しかし、$1-FF$が負になると次のステップでMの符号が変わり、物理的に考え

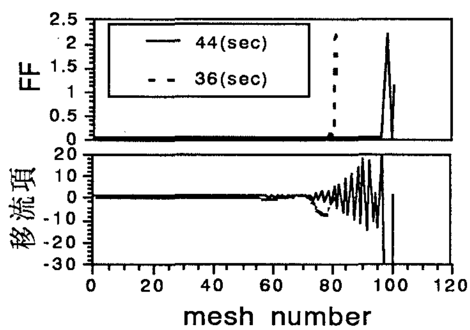

図２　摩擦項と移流項

て明らかに正しくない。そして、その誤差は次ステップで移流項を計算するときには2乗に増幅される。また、移流項は空間微分であり差分化すると次のようになる。

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{M_i^2}{D_i}-\frac{M_{i-1}^2}{D_{i-1}}\right) \qquad (2)$$

従って、*FF*の増大により先端部で*M*の値が急激に変化すると、移流項がバランスを崩し発散すると考えられる。

4．安定理論

物理的に正しい計算を行うためには、α>0でなければならない。これは十分条件とは言えないが、先端部での流速に制限を与えるものであり、安定に計算を行うためには少なくとも満たす必要があると考えられる。

α>0であるためには*FF*<1であればよい。ここで*M*=*uD*とし、*u*にManningの流速公式を用い、*D*を仮想水深*ha*で置き換え、式を変形すると*ha*の満たすべき条件として次式が得られる。

$$h_a > \left(\frac{\Delta t}{2} g n i^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (3)$$

この式に前例の計算条件(n=0.03,i=0.1,dt=0.2sec)を代入すると$h_a > 8.8\times10^{-4}$(m)となる。この条件を満たすものとして表1に示したの3ケースで数値計算を行った。いずれも打ち切り水深は1.0×10^{-7}(m)とした。

表1　計算結果

	ha(m)	結果
case 1	0.001	発散
case 2	0.01	発散
case 3	0.4	安定

勾配 i=0.1

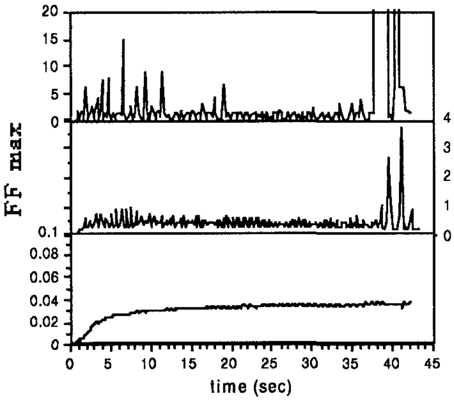

図3　計算中に現れたFFの最大値

図3は、各ケースについて、計算中に発生した*FF*の最大値を時間ステップごとに示したものである。case 1 では開始直後から、*FF*>1となり不安定を起こしている。case 2 では*FF*>1にはなっていないが、値が振動していて不安定であり、最終的には発散している。case 3 では*FF*は小さく極めて安定と言えるが、1mの水位に対して仮想水深に40cmという値を用いているので、計算誤差を考えると非実用的である。

5．Whitham 理論を適用した先端条件

4 求めた安定理論は、先端条件を水深*D*が小さいところとして考えたがこれでは十分ではない。実際、表1の case 2 に見られるように、(2)式の安定条件を満たしていても発散する場合が見られた。そこで、次に示す、先端部において圧力項と摩擦項が釣り合うとして導かれた理論波形の式(Whitham理論)を適用してさらに条件を加える。

$$h=\dot{a}\sqrt{\frac{2Kx'}{g}} \qquad (4)$$

x': 先端からの距離，h: x' 地点の水深，　K: 抵抗係数($=u_*^2/u^2$)，
g: 重力加速度，　a: 先端位置，　・: 時間微分

(4)をxで微分すると先端部での波形勾配が得られる。計算中は先端部での波形勾配がこれより大きくならないように制御する必要がある。しかし、(4)式を利用する場合、先端の移動速度 $\dot{a}$ の算定方法に問題があり、今後さらに検討する必要がある。