

II-10

時空間表面波形情報に基づく流速場の推定手法の開発

 東京工業大学 学生会員 ○大野修史
 東京工業大学 正会員 灘岡和夫

1. はじめに

表面波形情報から直下の流速場を算定する方法としてはDeenの流れ関数法¹⁾が有名である。この方法はStokes波理論等の通常の有限振幅波理論と異なり、前後非対称の波動場をも記述し得ることから、流速波形の正確な表現が必要となる漂砂等の問題の解析に際して有力な手法となっている。しかしながら、その理論の基本的な前提として、定形進行波が対象とされていることから、不規則波へ適用することは原理的に不可能である。一方で、海岸工学研究の現状から見ると、様々な分野で不規則波を対象とすることが多くなってきており、表面波形情報からの流速場算定方法としても、非線形不規則波動場をも対象とし得るような新たな手法の開発が望まれる。

そこで本研究では、室内実験での画像データ等から得られる時空間表面波形情報を用いることによって非線形不規則波動場における流速場をも推定し得る手法を開発することを試みた。

2. 算定方法

ここでは、自由表面における境界条件として次式の運動学的条件を用いる。+

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \bigg|_{z=\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (1)$$

(ここで、 x, z : 水平・鉛直方向座標、 η : 自由表面、 ϕ : 速度ポテンシャル。)

境界での微分の数値的な取り扱いを簡単にするために、自由表面上($z=\eta$)におけるポテンシャル $\phi_s(x, t)$ を用いた関係式

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=\eta} = \frac{\partial \phi_s}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} \bigg|_{z=\eta} \quad (2)$$

によって式(1)を書き換えると、次式を得る。

$$\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \phi}{\partial x} \bigg|_{z=\eta} = \frac{\partial \phi_s}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} \bigg|_{z=\eta} \quad (3)$$

ここで、斜面勾配が緩く、局所的に ϕ として次式に示す水深 h の水平床におけるラプラスの式の一般

解(例えばNadaoka & Hino²⁾)を用いることができるものと仮定する。

$$\phi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k, t) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \exp(ikx) dk \quad (4)$$

ここで、 k は波数、 $A(k, t)$ は一種の非定常波数スペクトル、 i は虚数単位を表す。式(4)を式(3)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} A(k, t) k \frac{\sinh k(h+\eta)}{\cosh kh} \exp(ikx) dk \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} A(k, t) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\cosh k(h+\eta)}{\cosh kh} \right] \right. \\ & \quad \left. + ik \frac{\cosh k(h+\eta)}{\cosh kh} \right\} \exp(ikx) dk + \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

波数 k および空間 x について離散化を行うと、

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_m^2 \right] \sum_{n=1}^N A_n(t) k_n \frac{\sinh k_n(h_m + \eta_m)}{\cosh k_n h} \exp(ik_n x_m) \Delta k \bigg|_n \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \sum_{n=1}^N A_n(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\cosh k_n(h_m + \eta_m)}{\cosh k_n h} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\cosh k_n(h_m + \eta_m)}{\cosh k_n h} ik_n \right\} \exp(ik_n x_m) \Delta k \bigg|_n + \frac{\partial \eta}{\partial t} \bigg|_m \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる。ここで、添え字の m および n は空間および波数に対する離散点を表している。

複素数である波数スペクトルを $A_n(t) = a_n(t) + ib_n(t)$ として虚部と実部に分離し、実数部をとると、次式が得られる。

$$\sum_{n=1}^N \alpha_{mn} a_n + \beta_{mn} b_n = \gamma_m \quad (7)$$

ただし

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} = & \left\{ - \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_m^2 \right] k_n \frac{\sinh k_n(h_m + \eta_m)}{\cosh k_n h_m} \sin k_n x_m \right. \\ & + \frac{\partial \eta}{\partial x} \bigg|_m k_n \frac{\cosh k_n(h_m + \eta_m)}{\cosh k_n h_m} \cos k_n x_m \\ & \left. + \frac{\partial \eta}{\partial x} \bigg|_m \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cosh k_n(h_m + \eta_m)}{\cosh k_n h} \right) \right] \sin k_n x_m \right\} \Delta k \bigg|_n \end{aligned}$$

$$\beta_{nm} = \left\{ \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_m} \right)^2 \right] k_n \frac{\sinh k_n (h_m + \eta_m)}{\cosh k_n h_m} \cos k_n x_m \right. \\ \left. + \frac{\partial \eta}{\partial x_m} k_n \frac{\cosh k_n (h_m + \eta_m)}{\cosh k_n h_m} \sin k_n x_m \right. \\ \left. - \frac{\partial \eta}{\partial x_m} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cosh k_n (h + \eta)}{\cosh k_n h} \right) \right]_m \cos k_n x_m \right\} \Delta k_n \\ \gamma_m = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_m$$

本手法では、 η に関する時空間変動が既知であることを前提としているため、未知数は、離散化された波数スペクトル a_n および b_n の $2N$ 個であり、離散化された空間において M 個の方程式が成立している。この M 個の方程式に対する最適解を求めるために、方程式の残差の自乗和 S を次のように定義する。

$$S = \sum_{m=1}^M \left[\sum_{n=1}^N (\alpha_{mn} a_n + \beta_{mn} b_n) - \gamma_m \right]^2 \quad (8)$$

最適解の条件 $S \rightarrow \min$ から

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_i} = 0 \quad (9)$$

として得られる以下の連立方程式により、 a_n と b_n を求めることができる。

$$\sum_{m=1}^M \alpha_{im} \left[\sum_{n=1}^N (\alpha_{mn} a_n + \beta_{mn} b_n) \right] = \sum_{m=1}^M \alpha_{im} \gamma_m \quad (10)$$

$$\sum_{m=1}^M \beta_{im} \left[\sum_{n=1}^N (\alpha_{mn} a_n + \beta_{mn} b_n) \right] = \sum_{m=1}^M \beta_{im} \gamma_m \quad (11)$$

($i=1, \dots, N$)

なお、本手法により a_n と b_n を（したがって ϕ ）が求まれば、Bernoulliの定理より圧力場も簡単に求められることは言うまでもない。

3. 理論解による検証

ここでは、本手法の妥当性を検証するために、いくつかの理論解を対象とした検討を行った。ただし、非線形不規則波に対する厳密な理論解（解析解）は存在しないので、ここではまず浅水域および深水域でのStokes波（3次）を対象とすることにより非線形性のみの検討を行い、続いて線形不規則波を対象とすることによって不規則性のみの検討を行った。ここで、離散化波数は、深水域のStokes波が $2\pi/128$ から $40\pi/128$ 、浅水域のStokes波及び不規則波が $2\pi/512$ から $40\pi/512$ 、までの20個とした。それぞれの場合の計算例を図-1a, 1b, 2に示すが、このうちStokes波に関しては、浅水域および深水域ともに理

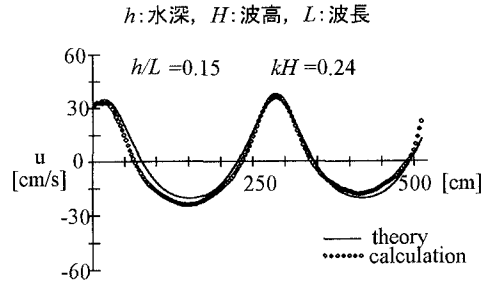


図-1a Stokes波（浅水域）

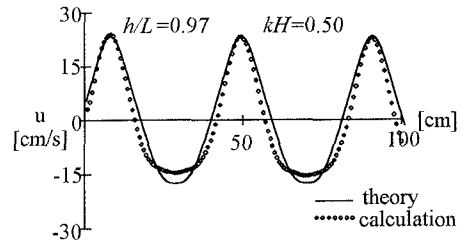


図-1b Stokes波（深水域）

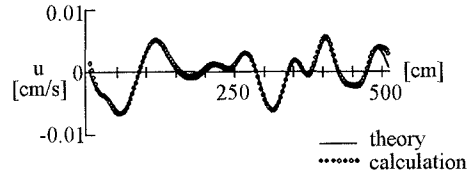


図-2 線形不規則波

論値にほぼ一致しており、非線形性の再現性に関しては問題ないことがわかる。また不規則波においては、計算値は理論値とほぼ完全に一致しており、不規則性の再現性は良好であることがわかる。

以上の非線形性および不規則性の検証結果より、本手法は、非線形不規則波動場においても、流速場を十分精度よく推定できるものと考えられる。

〔参考文献〕

1. Deen, R.G. (1965): Stream function representation of nonlinear ocean waves, J. Geophys. Res., Vol.70, pp.4561-4572.
2. Nadaoka, K. and Hino, M. (1984): Conformal mapping solution of a wave field on the arbitrary shaped sea bottom, Proc. Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, pp.1192-1208.