

II-4

乱れを考慮したBoussinesq方程式による砕波変形モデル

名古屋工業大学 正会員 柏原謙爾
名古屋工業大学 正会員 喜岡 渉

1. はじめに

現在のところ、Boussinesq方程式は砕波減衰を組み込むことが可能な唯一の非線形波動方程式である。Boussinesq方程式による砕波変形の計算例としては、運動量式中に砕波減衰の補正項として摩擦項や粘性項を付加したモデル（例えば、片山・佐藤，1990）やSchäffer et al. (1993)のSurface rollerを導入したモデルが挙げられる。しかし、前者が経験則に強く依存している点や、両者ともにBoussinesq方程式に付加された補正項の近似上の整合性が明確でない点でこれらのモデルには問題が残されている。一方、砕波に伴い発生する乱れをモデル化した研究例としてはKarambas・Koutitas (1992)がある。しかしながら、彼らは乱れ場に対し0方程式モデルを導入するにとどまっており、砕波のように局所性が強くかつ非定常な現象の解析を行う場合には、より合理的に乱れエネルギーが評価されるモデルを構築する必要がある。本研究は、Boussinesq方程式による砕波変形モデルを乱れについて水深平均の乱れエネルギー $\tilde{k}$ と分子粘性逸散率 $\tilde{\varepsilon}$ を未知量とする2方程式に基づき検討するもので、一様勾配斜面上の砕波変形に対するモデルの再現性について調べるものである。

2. 乱れの影響を考慮したBoussinesq方程式

断面2次元の非圧縮性流体を考え、分子粘性応力はReynolds応力と比較すると無視できるほどに微小であると仮定する。Boussinesq方程式では波の分散性についての近似オーダーを精度の尺度に用いるため、方程式の誘導に際してはReynolds応力項のオーダーについても近似上の仮定を設けておく必要がある。ここでは砕波や底面摩擦により生成される乱れを対象とすることから、Reynolds応力項は移流項と同等のオーダーであると仮定しておく。すなわち、 $\varepsilon = a_0/h_0$ (a_0 : 波の代表振幅, h_0 : 代表水深), $\mu^2 = \omega^2 h_0/g$ (ω : 角周波数)で定義される非線形性と分散性それぞれについてのパラメーター ε と μ を用いると、Reynolds応力項および底面摩擦応力項のオーダーは $O(\varepsilon)$ であるとする。さらに、 ε , μ の間に $\varepsilon/\mu^2 \sim O(1)$ の関係が成り立つものとし、基礎式の連続式とReynolds方程式に対して $O(\varepsilon, \mu^2)$ の項まで考慮すると、波動場については次のBoussinesq方程式(1), (2)を得る。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)u_a] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (hu_a)}{\partial x^2} - h \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} z_a^2 \frac{\partial u_a}{\partial x} + z_a \frac{\partial (hu_a)}{\partial x} \right\} \right] = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + u_a \frac{\partial u_{ax}}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left[\frac{1}{2} z_a^2 \frac{\partial^3 u_a}{\partial x^2 \partial t} + z_a \frac{\partial^3 (hu_a)}{\partial x^2 \partial t} \right] - \frac{1}{\rho h} \frac{\partial}{\partial x} [h \tilde{\tau}_{xx}] + \frac{1}{\rho h} \tau_{bx} = 0 \quad (2)$$

ここに、 ρ は流体密度、 h は静水深、 ζ は水面変動、 u_a は任意水深 z_a における水平方向流速であり、 t は時間、 x は水平方向の座標を表す。 $\tilde{\tau}_{xx}$ は水深平均のReynolds応力、 τ_{bx} は底面摩擦応力でありそれぞれ次の式(3), (4)で評価する。

$$\tilde{\tau}_{xx} = \rho \left[\tilde{\nu}_t \left(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \tilde{k} \right], \quad \tilde{\nu}_t = C_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (3)$$

$$\tau_{bx} = \rho C_f |\bar{u}| \bar{u} \quad (4)$$

ただし、 $\tilde{\nu}_t$ は渦動粘性係数、 $\bar{u}$ は水深平均の水平方向流速、 $\tilde{k}$, $\tilde{\varepsilon}$ はそれぞれ水深平均の乱れエネルギーと乱れエネルギー逸散率である。また、 C_f は底面摩擦係数であり $C_f = 0.01$ とする。

3. 乱れ場のモデル化

乱れ場についてはRastogi・Rodi (1978)にならい、水深平均の乱れエネルギー $\tilde{k}$ と乱れエネルギー逸散率 $\tilde{\varepsilon}$ を未知量とする次の2方程式を用いてモデル化する。

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{u} \tilde{k}] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} \right] + (P_h + P_w) + P_{k_v} - \tilde{\varepsilon} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{u} \tilde{\varepsilon}] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} (P_h + P_w) + P_{\varepsilon_v} - C_{2\varepsilon} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}} \quad (6)$$

ここに、 P_w , P_h はそれぞれ砕波によって形成されるBoreおよび水平せん断による乱れエネルギー生成項であり、 P_{k_v} , P_{ε_v} はそれぞれ $\tilde{k}$, $\tilde{\varepsilon}$ 方程式における P_h の補正項である。 P_w はStive(1984)の算定方法を用いて砕波した波のエネルギー逸散率 D を求め、 $P_w = D/(\rho h)$ として与えた。また、 P_h , P_{k_v} および P_{ε_v} の各項はRastogi・Rodi(1978)の評価方法に従った。モデルの各定数は対象とする現象に応じて変化するが、砕波の乱

れ場に対しては不明であるため、式(5)、(6)中の定数 $C_{1\bar{\varepsilon}}$ 、 $C_{2\bar{\varepsilon}}$ 、 $\sigma_{\bar{k}}$ 、 $\sigma_{\bar{\varepsilon}}$ についてはそれぞれ従来 $\bar{k}-\bar{\varepsilon}$ モデルによる開水路乱流計算でよく用いられている値 1.44, 1.92, 1.0, 1.3 を用いた。ただし、渦動粘性係数を直接支配する C_μ については碎波減衰が再現できるような値を調節してやる必要がある。 C_μ のオーダーを調べるため、乱れ場のエネルギー生成としてBoreによるエネルギー減衰 D のみを考え、生成項と逸散項がほぼ釣り合っているもの（すなわち、 $P_w \approx \bar{\varepsilon}$ ）として周期平均の1方程式モデルを用いて計算を行うと、 C_μ は10前後の値をとることがわかる。なお、碎波の判定は波前面における水面変動の空間勾配の最大値 $(\partial\zeta/\partial x)_{\max}$ によった。碎波限界の $(\partial\zeta/\partial x)_{\max}$ は、合田の碎波指標から得られる碎波水深に対応した $(\partial\zeta/\partial x)_{\max}$ としてあらかじめ求めておいた。

4. 数値解析結果

波動場、乱れ場ともに数値計算は差分法によった。空間方向には4ないし5格子点の中央差分を用い、時間方向にはCrank-Nicolson法をベースとした方法で非線形項について予測修正をしつつ積分を行った。なお、空間についてのみ離散格子点はスタッガードに配置した。図-1は沖波波形勾配 $H_0/L_0 = 0.0125$ の正弦波を勾配1/30の様な斜面に入射させた場合の碎波後の波高減衰を示したものである。図中、黒点は計算結果を、×印はHorikawa・Kuo(1966)の実験結果を示している。ここに示すのは $C_\mu = 8.0$ のケースであるが、波高減衰は幾分過大に評価されている。図-2は碎波点付近の水面変動と乱れ場の諸量の空間波形を示したもので、図中の l_e は $l_e = C_d \bar{k}^{3/2}/\bar{\varepsilon}$ ($C_d = 0.17$)として求めた混合距離を表す。混合距離は水深の1割程度となっており従来の知見に一致するが、その空間分布形状は一定ではなく波の伝播に伴い変動している。

5. おわりに

本研究では、 $\bar{k}-\bar{\varepsilon}$ 2方程式モデルによって碎波に伴い発生する乱れを考慮したBoussinesq方程式に基づく碎波変形モデルの開発を行い、この方程式系により碎波減衰を合理的に評価できることを明らかにした。ただし、波高減衰の再現性には問題が残されており、乱れのモデル定数の評価などについてさらに検討を加えていく必要がある。

参考文献

片山裕之・佐藤慎司 (1993), 海岸工学論文集, 第40巻, pp.16-20.

Horikawa, K. And Kuo, C.-T. (1966), Proc. 10th Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.217-233.

Karambas, Th. V. and Koutitas, C. (1992), Coastal Eng., Vol.18, pp.1-19.

Rastogi, A. K. and Rodi, W. (1978), Proc. ASCE, Vol.104, No.HY3, pp.397-420.

Schäffer, H. A., Madsen, P. A. And Deigaard, R. (1993), Coastal Eng., Vol.20, pp.185-202.

Stive, M.J.F. (1984), Coastal Eng., Vol.18, pp.99-127.

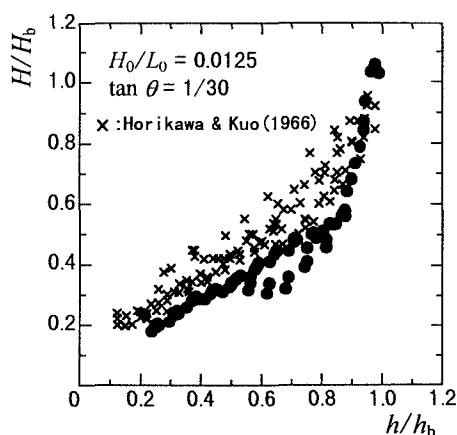


図-1 碎波後の波高減衰
($C_\mu = 8.0$)

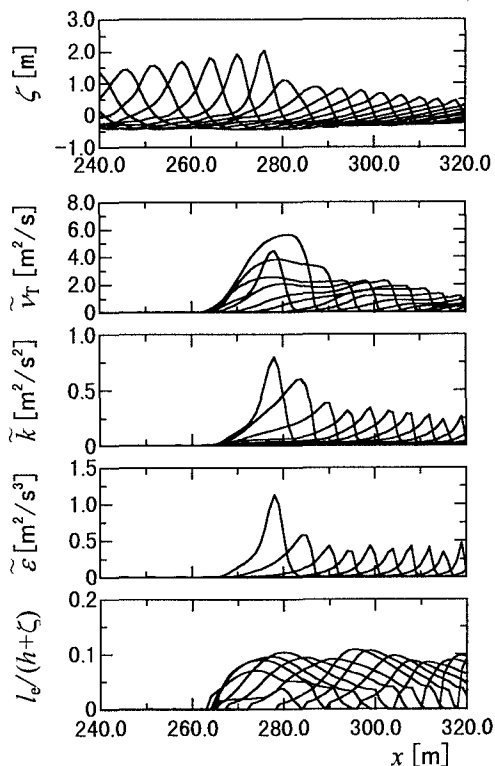


図-2 1/30勾配斜面上における碎波変形
($C_\mu = 8.0$)