II-2　極座標表記された放物型方程式による点源波の数値解析

筑波大学構造工学系　正　員　西村仁嗣
筑波大学大学院　　　学生員　郭　文秀
筑波大学基礎工学類　　　　　佐竹寿男

1. はじめに

港内における波浪場を求めることは，港湾設計上重要な意味を持つ．近年では，多大な労力を要する水理模型実験に代わり，この目的で様々な数値解析が行われるようになった．しかしながら，回折，多重反射といった複雑な波の変形を十分に表現する手法は未だ得られていない．一様水深に対しては既に確立されている Green 関数法を任意水深の場に応用するため，任意水深に対する点源波の素解を求めるのが，本研究の目的である．

緩勾配方程式を基礎方程式とし，点源波が円環状に伝播する状況を考えることからこれを極座標で表し，さらに進行性の波を簡便に取り扱うために放物型方程式で近似した．導出した放物型方程式を差分化し，任意水深場の点源波の素解を数値的に求めた．

2. 基礎方程式

点源から発する波が円環状に伝播する状況を表現するために，まず緩勾配方程式を極座標で表す．

$$\frac{\partial CC_g}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial CC_g}{\partial \theta}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + CC_g\left(k^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\phi = 0 \tag{2.1}$$

ここで，rは点源からの距離，θは方向角，ϕは複素振幅関数，kは波数，Cは位相速度，C_gは群速度である．

次に，ここでは進行性の波のみを考えるので，この方程式の取り扱いを簡単にするため，放物型方程式で近似することを考える．上式の解 ϕが，湧き出し波成分ϕ^+および 吸い込み波成分ϕ^-の和として表されるものとし，splitting matrix 法(Corones,1975)を適用する．導出の過程で ϕ^+と ϕ^-に対し近似的に次のような Hankel 関数の漸近展開式の初項を用いた．

$$\phi^+ = a\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{\pi}{4})} \quad , \quad \phi^- = b\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{-i(kr-\frac{\pi}{4})} \tag{2.2}$$

湧き出し波成分について最終的に得られる放物型波動方程式は次の通りである．

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left\{ik - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} - \frac{1}{2kCC_g}\frac{\partial}{\partial r}(kCCg) - \frac{i}{4kr}\frac{1}{CC_g}\frac{\partial CC_g}{\partial r}\right\}\phi + \frac{i}{2kr^2 CC_g}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(CC_g\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \tag{2.3}$$

3. 数値解析

数値計算法としては，直交座標系の放物型方程式にならい，Crank-Nicolson 法を用いた．点源を中心として r 方向の刻みを i，θ 方向の刻みを j とする計算格子をとり，基礎方程式(2.3)の差分化を行う（図 3.1）．点波源そのものは特異点であり，これを数値的に扱うことは不可能である．そこで，波源近傍に一様水深の微小円領域を想定，その外縁から外側に向って marching scheme の計算を行う．

導出した放物型方程式の妥当性を調べるため，まず一様水深場の点源波の位相変化および振幅変化を試算し，Hankel 関数値と比較した．図 3.2の位相変化を見ると，漸近展開式(2.2)による近似を含むため，計算始点kr_0を点源の近くにとればとるほど位相のズレが大きくなる．しかしながら，計算始点を $kr_0 > 0.8$にとると，Hankel 関数とよく一致する結果が得られる．また，この条件の下では，図 3.3の振幅変化についても十分な精度が得られる．

次に，水深が変化するケースとして，平行等深線斜面上の点源から発する波の計算結果を示す．とくに，波速 C が線形に変化する場合については屈折の厳密解が得られ，これを組み

合わせることによって波峰線の良好な近似解が得られる．図 3.4はこのケースについて，計算値と理論解を比較したものである．極浅域で両者の間に有意な差が認められるが，ここでは r 方向の距離刻みを一定としたため，波速の減小とともに精度の相対的な低下が生じたものと思われる．

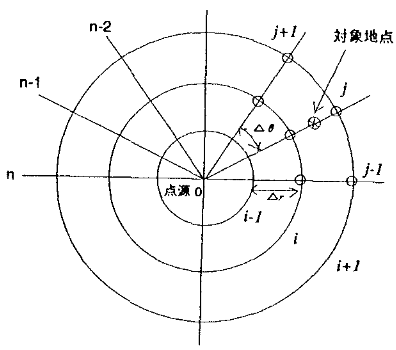

図 3.1 計算格子および変数の配置

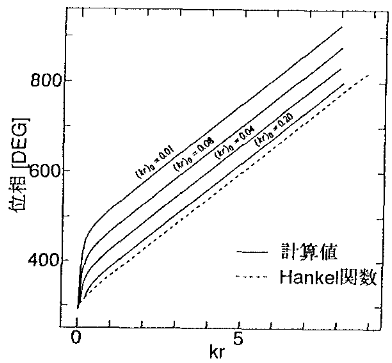

図 3.2 計算始点(kr)。による位相変化

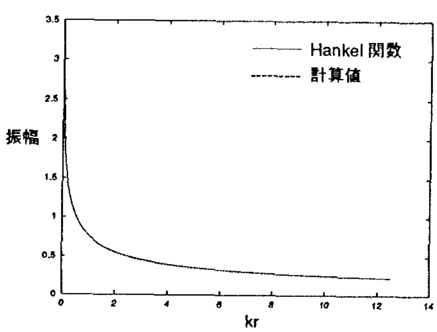

図 3.3 振幅変化の比較(計算始点,kr=0.8)

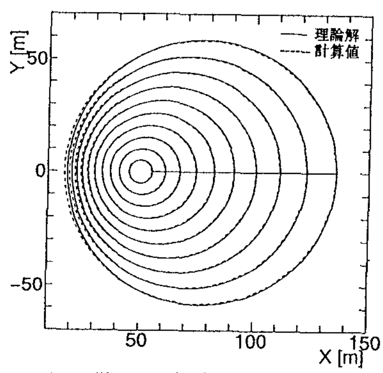

図 3.4 厳密解と計算値との位相による比較

4. 結論

緩勾配方程式から出発し，極座標系におけるその放物型近似を導いた．また，得られた放物型波動方程式を数値的に解くことにより，点源の小領域を除けば，高精度の解が得られることを確認した．

本研究で得られた放物型波動方程式の素解を Hankel 関数に代わる点源波として組み込むことにより，Green 関数法の一般化が図られるものと期待される．

参考文献

[1] Berkhoff, J.C.W. (1972) : Computation of Combind Refraction-Diffraction, Proc.13th ICCE, ASCE, 471-190.

[2] Corones, J. (1975) : Bremmer Series that Correct Parabolic Approximations, *J. Math. Analy. and Appl.*, **50**, 361-372.

[3] Radder, A.C. (1979) : On the parabolic equation method for water-wave propagation, *JFM*, **95**(1), 159-176.

[4] 西村仁嗣,松岡道男,松本朗,篠田伸昌(1993)：グリーン関数法による港内静穏度解析，海岸工学論文集，第40巻.