

II-1 波群包絡波の算定法についての比較研究

中央大学大学院 学生会員 松立 博樹
中央大学理工学部 正会員 水口 優

1. はじめに

包絡波の算定法としてHilbert変換法（Tayfun and Lo(1989), Van Leeuwen(1992)など）や、List(1991)による水位変動の絶対値に数値ローパスフィルタを施す方法などがある。他にいくつかの算定法を考え、それらの間の比較を、包絡波波形のみではなく位相についても行った。

2. 包絡波の算定法について

以下、水位変動 $\eta(t)$ を包絡波を持つ形として $\eta'(t)$ と近似する。

2.1 Hilbert変換法 包絡波形 $A(t)$ と位相 $\chi(t)$ は、 $\eta(t)$ とそのHilbert変換 $\eta_H(t)$ を用いて下記のように表せる。次式中の $\pi/2$ は他の算定法と位相を合わせるために加えた。

$$\eta'(t) = A(t) \cos\{2\pi f t + \chi(t) + \frac{\pi}{2}\} \quad (1)$$

$$A(t) = \sqrt{\eta^2(t) + \eta_H^2(t)} \quad (2)$$

$$\chi(t) = -\tan^{-1} \frac{\eta_H(t)}{\eta(t)} - 2\pi f t \quad (3)$$

2.2 絶対値の数値ローパスフィルタ法（Listの方法） 式で表せば次のようになる。

$$\eta'(t) = A(t) \sin\{2\pi f t + \chi(t)\} \quad (4)$$

$$A(t) = \frac{\pi}{2} \{ |\eta(t)| \}_F \quad (5)$$

$$\chi(t) = \sin^{-1} \frac{\eta(t)}{A(t)} - 2\pi f t \quad (6)$$

$\{ \}_F$ は、 $\{ \}$ の中に関数に数値ローパスフィルタを施したものである。数値ローパスフィルタを用いる方法では、 $A(t)$ 、 $\chi(t)$ はカット周波数 f_c に依存する。

2.3 自乗値の数値ローパスフィルタ法 $\eta^2(t)$ に数値ローパスフィルタを施すものであり、 $A(t)$ は次式のように表せる。

$$A(t) = \sqrt{2 \{ \eta^2(t) \}_F} \quad (7)$$

$\eta'(t)$ 、 $\chi(t)$ は、それぞれ式(4)と式(6)と同様である。

2.4 あてはめ法 $\eta'(t)$ を次式の様に表すと $A(t)$ と $\chi(t)$ は、下記のように $a(t)$ と $b(t)$ で表せる。

$$\begin{aligned} \eta'(t) &= A(t) \sin\{2\pi f t + \chi(t)\} \\ &= a(t) \sin(2\pi f t) \\ &\quad + b(t) \cos(2\pi f t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$A(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} \quad (9)$$

$$\chi(t) = \tan^{-1} \frac{a(t)}{b(t)} \quad (10)$$

$a(t)$ と $b(t)$ は次式の r^2 が最小となるものを用いる。

$$r^2 = \sum_{t=T^*}^{t+T^*} \{ \eta'(t) - \eta(t) \}^2 \quad (11)$$

$A(t)$ 、 $\chi(t)$ は、 T^* の取り方に依る。

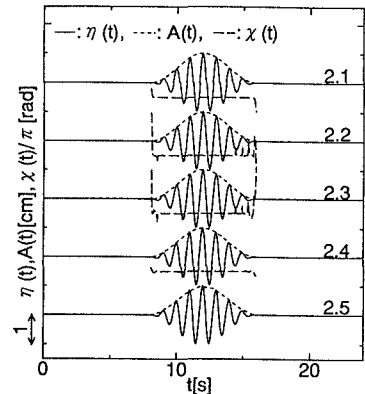


図-1 3.1に対する $\eta(t)$ 、 $A(t)$ 、 $\chi(t)$

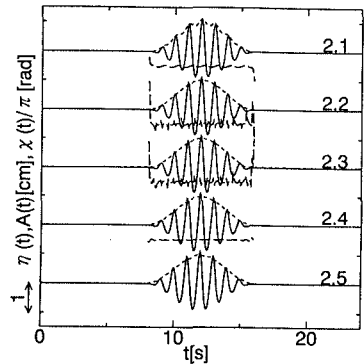


図-2 3.2に対する $\eta(t)$ 、 $A(t)$ 、 $\chi(t)$

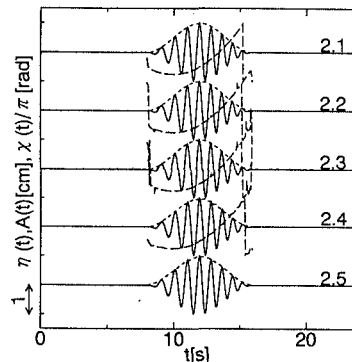


図-3 3.3に対する $\eta(t)$ 、 $A(t)$ 、 $\chi(t)$

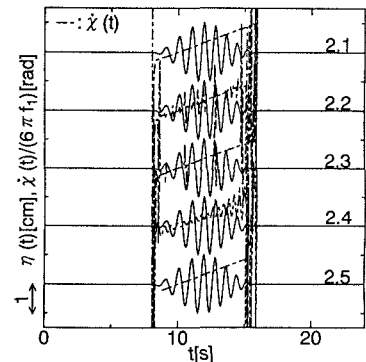


図-4 3.3に対する $\eta(t)$ 、 $\dot{\chi}(t)$

2. 5 個々波法 波別解析法(例えば、ゼ・ロウソノ法)を用いる方法である。 $A(t)$ は、 $\eta(t)$ を波別解析し、個々の波の波高 H を求め、 H の1/2の値をゼ・ロウソノ点にプロットし、その点を直線で結んで得られる。

3. 解析及び結果

3. 1 基本波が単一周波数の場合 解析に用いる波群として、下記のような単一波群を与えた。

$$\eta(t)=A(t)\cos(2\pi f_0 t)=a\{1-\cos(2\pi f_g t)\}\cos(2\pi f_0 t) \quad (12)$$

ここで、 $a=0.5\text{cm}$ であり、 $f_0=1\text{Hz}$ 、 $f_g=0.125\text{Hz}$ は、それぞれ基本波、波群の周波数とする。解析条件は各方法ともに $f=f_0$ とした。また、数値ローパスフィルタ法を用いる場合は、 $f_c=0.5\text{Hz}$ とし、あてはめ法では、 $fT^*=3/8$ とした。図-1は、 $\eta(t)$ と各方法で算定を行った $A(t)$ 、 $\chi(t)$ である。 $A(t)$ については、全ての方法で滑らかなものを得る。しかしながら、自乗値の数値ローパスフィルタ法は今回検討した全ケースで若干のギザギザ現象が見られる。 $\chi(t)$ については、各方法ともに一定値となる。

3. 2 基本波に倍周波数成分が乗っている場合（有限振幅波の場合） 有限振幅性を表すために式(12)に、1/10の大きさで基本波が同位相、倍周波数の波群を加えたものを与えた。

$$\eta(t)=A(t)\{\cos(2\pi f_0 t)+0.1\cos(4\pi f_0 t)\} \quad (13)$$

ここで、諸量は3.1と同様とした。解析条件は、あてはめ法について $fT^*=5/8$ とした以外は、3.1と同様とした。図-2は、 $\eta(t)$ と各方法で算定を行った $A(t)$ 、 $\chi(t)$ である。Hilbert変換法では、多少ギザギザした $A(t)$ が得られる。他の方法では滑らかで2.1と同じ大きさの $A(t)$ を得る。 $\chi(t)$ については、あてはめ法はほとんど一定値を示すのに対し、他の方法では変動する。

3. 3 基本波の周波数が変化する場合 開始点で f_0-f_1 、最後尾で f_0+f_1 となる直線の変化を与えた。

$$\eta(t)=A(t)\cos\{2\pi f_0 t+2\pi f_1 t(2f_g t-1)\} \quad (14)$$

ここで、 $f_1=0.125f_0$ 、その他の諸量は3.1と同様とし、解析条件も全て3.1と同様とした。図-3は、 $\eta(t)$ と各方法で算定を行った $A(t)$ 、 $\chi(t)$ である。 $A(t)$ は、あてはめ法では高周波数となる後半部で振動する。他の方法では、滑らかな $A(t)$ を求めることが出来る。 $\chi(t)$ は、いずれの方法も良好な結果となる。図-4は、 $\eta(t)$ と $\chi(t)$ をプロットしたものである。 $\chi(t)$ は周波数の伸び縮みを表す。 $\dot{\chi}(t)$ は、2.1～2.4の算定法では $\chi(t)$ の中央差分を用い、2.5では波別解析をした個々の波の周波数を用いて求めた。あてはめ法、数値ローパスフィルタ法では振動するが平均的には個々波法も含め、どの算定法も良好な結果となる。

4. おわりに

Hilbert変換法、絶対値の数値ローパスフィルタ法に加えて、自乗値の数値ローパスフィルタ法、あてはめ法、個々波法を用いて単一波群の包絡波と位相について比較研究した。検討対象は、①基本波が単一周波数の場合、②基本波に倍周波数成分が乗っている場合、③基本波の周波数が変化する場合である。検討結果を表-1にまとめる。どの算定法を用いても大きな差はないが、あてはめ法、数値ローパスフィルタ法は、算定の際に適当な T^* 、 f_c を用いなければならないという問題がある。 $A(t)$ については、適応範囲

表-1 各算定法の適応性

	3.1		3.2		3.3			変数
	$A(t)$	$\chi(t)$	$A(t)$	$\chi(t)$	$A(t)$	$\chi(t)$	$\dot{\chi}(t)$	
2.1	◎	◎	×	○	◎	◎	◎	なし
2.2	◎	◎	◎	△	◎	◎	△	あり
2.3	○	◎	○	△	○	◎	○	あり
2.4	◎	◎	◎	◎	△	◎	△	あり
2.5	○	—	○	—	○	—	◎	なし

適応性 高い ← ◎ ○ △ × → 低い

の広さから絶対値の数値ローパスフィルタ法が、算定の容易さからは個々波法が良い。 $\chi(t)$ については、あてはめ法が全ケースで良好の結果を得る。 $\dot{\chi}(t)$ については、直接的に算定できる個々波法が良いと言う検討結果になる。

参考文献

- Tayfun, M. A., and Lo, J. M. (1989), Envelope, phase and narrow-band models of sea waves, J. Wtrwy., Port, Coast., and Oc. Engrg., ASCE, 115(5), 594-613.
 List, J. H. (1991), Wave groupiness variations in the nearshore, Coastal Eng., 15, 475-496.
 Van Leeuwen, P. J. (1992), Low-frequency wave generation due to breaking wind waves, Communications on hydraulic and geotechnical engineering.