土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

Ⅰ-B 346　　二相体時間領域解析の一定式化

日本大学　正会員　塩尻　弘雄
日本大学　　　　Ｂｅｎ　Ｊａｍａａ　Ｓａｍｉ

１．緒言

二相体の解析法として、大幅に透水性の異なる２相体間の境界条件を容易に満足し、精度・計算効率等優れた有限要素法に基づく時間領域の解法を提案する。これは、前回周波数領域解析法として述べた方法 (1) の、時間領域への拡張である。

２．定式化

物体力は重力のみとし、静的成分と動的成分が分離できるものとすれば、動的成分の平衡方程式は下記の様になる。

$$\mathbf{L}^T\mathbf{s}-\rho\,\ddot{\mathbf{u}}-\rho_f\ddot{\mathbf{w}}=\mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\nabla\pi-(1/k)\dot{\mathbf{w}}-m\ddot{\mathbf{w}}-\rho_f\ddot{\mathbf{u}}=0 \qquad (2)$$

ここで、$\mathbf{L}$は変位から歪みを求める演算子からなる行列、$\mathbf{s}$は全応力ベクトル、ρ は二相体の密度、$\mathbf{u}$は固体相の変位ベクトル、ρ_fは間隙水の密度、$\mathbf{w}$は間隙水と固体相の等価相対変位、∇はグラディエント、πは（間隙）水圧、kは透水係数、mは間隙水の相対変位に関する等価質量である。

構成式は下記のようになる。

$$\mathbf{s}=\mathbf{DLu}+\alpha\,\mathbf{m}\pi \qquad (3)$$

$$\pi=\alpha Q e+Q\xi \qquad (4)$$

ここで、$\mathbf{D}$は応力－歪行列、α とQ は材料定数、$\mathbf{m}=\{1,\ 1,\ 1\}^T$, $e=\nabla\bullet\mathbf{u}$、$\xi=\nabla\bullet\mathbf{w}$ である。式（3）を（4）に代入し式（１）、（４）に弱形式の定式化を行い、部分積分を行ってガウスの定理を適用したものと、式（2）を増分型で書くと次式を得る。

$$\nabla(\Delta\pi)-(1/k)\Delta\dot{\mathbf{w}}-m\Delta\ddot{\mathbf{w}}-\rho_f\Delta\ddot{\mathbf{u}}=0 \qquad (5)$$

$$\int\delta\mathbf{u}^T\mathbf{s}\,ds-\int\delta\mathbf{e}^T(\mathbf{DL}\Delta\mathbf{u}+\alpha\mathbf{m}\Delta\pi)\,dv-\int\delta\mathbf{u}^T(\rho\Delta\ddot{\mathbf{u}}+\rho_f\Delta\ddot{\mathbf{w}})dv$$
$$=\int\delta\mathbf{e}^T\mathbf{s}^i\,dv+\int\delta\mathbf{u}^T(\rho\ddot{\mathbf{u}}^i+\rho_f\ddot{\mathbf{w}}^i)dv \qquad (6)$$

$$-\int\delta\pi\,w_n ds+\int\delta(\nabla\pi)^T\Delta\mathbf{w}\,dv+\int\delta\pi\,(\alpha\nabla\bullet\Delta\mathbf{u})dv+\int\delta\pi\frac{\Delta\pi}{Q}dv$$
$$=\int\delta(\nabla\pi)^T\mathbf{w}^i\,dv+\int\delta\pi(\alpha\nabla\bullet\mathbf{u}^i)dv+\int\delta\pi\frac{\pi^i}{Q}dv \qquad (7)$$

ここで$\mathbf{w}_n$は$\mathbf{w}$の法線方向成分、$\Delta\mathbf{u}=\mathbf{u}^{i+1}-\mathbf{u}^i,\Delta\mathbf{w}=\mathbf{w}^{i+1}-\mathbf{w}^i$,　$\Delta\pi=\pi^{i+1}-\pi^i$,　$\Delta\mathbf{s}=\mathbf{s}^{i+1}-\mathbf{s}^i$　で、上付きの数字はステップ番号をあらわす。

時間積分法として、例えばNewmark　β法を用いるものとすれば、このとき、以下の関係式を得る。

$$\Delta\mathbf{u}=\beta\,\Delta t^2\Delta\ddot{\mathbf{u}}+(\dot{\mathbf{u}}^i\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}^i\Delta t^2)=a_1\Delta\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{u}_1 \qquad (8)$$
$$\Delta\dot{\mathbf{u}}=\gamma\,\Delta t\Delta\ddot{\mathbf{u}}+\ddot{\mathbf{u}}^i=a_2\Delta\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{u}_2$$

ここで、β,γ は積分パラメータ、Δtは時間増分、上付き添字は、時間ステップ番号を表す。$\Delta\mathbf{w},\Delta\pi$等についても類似の式を得る。これらを式（5）に代入して、　次式を得る。

$$\Delta\ddot{\mathbf{w}}=\frac{1}{F}\left\{a_1\nabla\Delta\ddot{\pi}-\rho_f\Delta\ddot{\mathbf{u}}-\mathbf{f}_1\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$

ここで

$F=\dfrac{a_2}{k}+m,\quad \mathbf{f}_1=-\nabla\pi_1+\dfrac{\mathbf{w}_2}{k}$ である。

式（8）～（9）を式（6）（7）に代入して、次式を得る。

$$\int\delta\mathbf{u}^T\mathbf{s}ds-\int\delta\mathbf{e}^T a_1\mathbf{DL}\Delta\ddot{\mathbf{u}}dv-\int\delta\mathbf{u}^T(\rho-\frac{\rho_f^2}{F})\Delta\ddot{\mathbf{u}})dv-\int\delta\mathbf{e}^T\alpha a_1\mathbf{m}\Delta\ddot{\pi}dv$$

$$-\int\delta\mathbf{u}^T\frac{\rho_f a_1}{F}\nabla\Delta\ddot{\pi}dv=\int\delta\mathbf{e}^T(\mathbf{DLu}_1+\alpha\mathbf{m}\pi_1+\mathbf{s}^i)dv+\int\delta\mathbf{u}^T\{\rho\ddot{\mathbf{u}}^i+\rho_f(\ddot{\mathbf{w}}^i-\frac{\mathbf{f}_1}{F})dv \quad \cdots(10)$$

$$\int\delta\pi w_n ds-\int\delta(\nabla\pi)^T\frac{a_1^2\nabla(\Delta\ddot{\pi})}{F}dv-\int\delta\pi\frac{a_1\Delta\ddot{\pi}}{Q}dv-\int\delta\pi\alpha a_1(\nabla\bullet\Delta\ddot{\mathbf{u}})dv+\int\delta(\nabla\pi)^T\frac{\rho_f a_1}{F}\Delta\ddot{\mathbf{u}}dv$$

$$=\int\delta\pi\frac{\pi^i+\pi_1}{Q}dv+\int\delta(\nabla\pi)^T\{\mathbf{w}^n+\frac{1}{F}(\mathbf{w}_1-a_1\mathbf{f}_1)\}dv-\int\delta\pi\alpha\nabla\bullet(\Delta\mathbf{u}^i+\mathbf{u}_1)dv$$

$$\cdots(11)$$

有限要素法で定式化するため。次の内挿関数を導入する。

$$\mathbf{u}=[N]\{\underline{\mathbf{u}}\},\quad \pi=[N_\pi]\{\underline{\pi}\},\quad \mathbf{e}=[B]\{\underline{\mathbf{u}}\},\quad \nabla\pi=[B_\pi]\{\underline{\pi}\},\quad \nabla.\mathbf{u}=[B_\pi]^T\{\underline{\mathbf{u}}\} \quad \cdots\cdots(12)$$

(10)式より

$$\{\underline{\delta\mathbf{u}}\}^T\int[N]^T\mathbf{s}ds-\{\underline{\delta\mathbf{u}}\}^T\int a_1[B]^T D[B]dv\{\underline{\Delta\ddot{\mathbf{u}}}\}-\{\underline{\delta u}\}^T\int\left(\rho-\frac{\rho_f}{F}\right)[N]^T[N]dv\{\underline{\Delta\ddot{\mathbf{u}}}\}-$$

$$\{\underline{\delta\mathbf{u}}\}^T\int\alpha a_1[B_\pi]^T m[N_\pi]dv\{\underline{\Delta\ddot{\pi}}\}-\{\delta\mathbf{u}\}^T\int\frac{\rho_f a_1}{F}[N]^T[B_\pi]dv\{\underline{\Delta\ddot{\pi}}\}=$$

$$\{\underline{\delta\mathbf{u}}\}^T\int[B]^T(\mathbf{DLu}_1+\alpha\mathbf{m}\pi_1+\mathbf{s}^i)dv+\{\underline{\delta\mathbf{u}}\}^T\int[N]^T\{\rho\ddot{\mathbf{u}}^i+\rho_f(\ddot{\mathbf{w}}^i-\frac{\mathbf{f}_1}{F})dv \quad \cdots\cdots(13)$$

(11)式より

$$\{\underline{\pi}\}^T\int[N_\pi]^T\mathbf{w}_n ds-\{\underline{\pi}\}^T\int\frac{(a_1)^2}{F}[B_\pi]^T[B_\pi]dv\{\underline{\Delta\ddot{\pi}}\}-\{\underline{\pi}\}^T\int\frac{a_1}{Q}[N_\pi]^T[N_\pi]dv\{\underline{\Delta\ddot{\pi}}\}$$

$$-\{\underline{\delta\pi}\}^T\int\alpha a_1[N_\pi]^T[B_\pi]dv\{\underline{\Delta\ddot{\mathbf{u}}}\}+\{\underline{\delta\pi}\}^T\int\frac{\rho_f a_1}{F}[B_\pi]^T[N]dv\{\underline{\Delta\ddot{\mathbf{u}}}\}=$$

$$-\{\underline{\delta\pi}\}^T\int[N_\pi]^T\frac{\pi^i+\pi_1}{Q}dv+\{\underline{\delta\pi}\}^T\int[B_\pi]^T\{\mathbf{w}^n+\frac{1}{F}(\mathbf{w}_1-a_1\mathbf{f}_1)\}dv-\{\underline{\delta\pi}\}^T\int\alpha[N_\pi]^T\nabla\bullet(\Delta\mathbf{u}^i+\mathbf{u}_1)dv$$

$$\cdots\cdots(14)$$

未知数の係数行列は対称になっている。

3．結言

固体－水－二相体系物体に対する、時間領域の有限要素法に基づく一定式化を示した。これは、固体部の変位Ｕと、水の圧力の動的成分 π を未知数とするものであり、自由度が小さく、かつ間隙水の慣性力も正確に表現しており、係数行列も対称である。厳密解や、既往の方法との比較は、当日発表する。

なお、今回は、線形解析のみ示したが、非線形解析への拡張も可能である。

参考文献

（１）塩尻弘雄：土木学会第５０回年次学術講演会pp1356-1357

（２）Simon,B.R.,et.ai.,Int.J.Numer.Anal.Meth.Geotech.,Vol.10,pp461-482,1986