I－B 188　Intrinsic Random Field の条件付シミュレーション理論の数値的検証

攻玉社工科短期大学　正会員　山本欣弥
武蔵工業大学　学生員　市東哲也
武蔵工業大学　正会員　星谷　勝

１．目的

平均値および共分散関数が未知の確率場Z(X);X=ベクトル座標 において、N箇所でサンプル実現値Z(Xi);i=1~N が観測されている。このとき、N個の観測値より場の特性を表すバリオグラムを推定し、非観測点Xrでのサンプル実現値Z(Xr)を求める条件付シミュレーション理論[1]を数値計算例を用いて検証する。

２．条件付シミュレーション理論

確率場の平均値E[Z(X)]を座標関数を用いて表すことができるものと仮定する。未測定点でのZ(Xr)を平均値とその周りの変動を表すW(X)の和として表し、W(Xr)をN箇所の観測点でのサンプル実現値W(Xi);i=1~N を用いた線形補間式で予測する（(1)式）。このとき自動的にE[W(X)]=0 となる。$\lambda_i(Xr)$は誤差$\varepsilon(Xr)$の最小自乗規範により決定する。また、β_jは、(2)式または(3)式より重回帰分析法[6]を用いて決定する。(4)式および(5)式にZ(Xr)の条件付平均と条件付分散を示す。(5)式において、γ_{ir}は、任意のベクトル座標XiおよびXr間のバリオグラムを表し、$\sigma^2_{(Z(Xr))}$は、Z(Xr)の無条件場での分散値を表す。この条件付シミュレーション理論の特徴は、確率場の特性を表す平均値、分散値、バリオグラムを観測値より推定することにある。これにより、現実に近い問題設定としている。

$$Z(Xr) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j(Xr) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(Xr) W(Xi) + \varepsilon(Xr) \tag{1}$$

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{N} \{\underline{Z}(Xi) - \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j(Xi)\}^2 \tag{2}$$

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{N} w' \{\underline{Z}(Xi) - \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j(Xi)\}^2 \quad , \quad w' = 1/E[Z(Xi)]^2 \tag{3}$$

$$E[Z(Xr)|cond.] = \sum_{j=1}^{p} \beta_j f_j(Xr) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(Xr) \underline{W}(Xi) \tag{4}$$

$$\sigma^2[Z(Xr)|cond.] = \sigma^2_{(Z(Xr))} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(Xr)\sigma^2_{(Z(Xr))} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(Xr)\sigma^2_{(Z(Xi))} + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(Xr)\gamma_{ir} \tag{5}$$

３．数値解析による検証

簡単のため、次式で表す平均値および共分散を有する一次元の確率場を用いる。

$$E[Z(X)] = 3.0 + 0.391X - 0.114X^2 + 0.026X^3 - 0.0020X^4 + 0.0000641X^5 \tag{6}$$

$$Cov(Z(Xl), Z(Xm)) = \exp\left[-\frac{|Xl - Xm|}{2.0}\right] \quad , \quad \text{Cov}(\cdot,\cdot);\text{共分散関数} \tag{7}$$

観測されたサンプル実現値を等間隔に11点与える($\underline{Z}$(Xi),i=1~11)。ただし、ここではコレスキー分解を用いた相関同時シミュレーションによりシミュレートされた１サンプルセットを用いた。図-1にサンプル実現値$\underline{W}$(Xi);i=1~Nより推定したバリオグラムを示す。観測値より求めた離散型バリオグラム（Experimental Variogram）を最小自乗法を用いて指数モデルの連続型バリオグラム（Theoretical Variogram）にフィッティングしている（(8)式）。また、場の平均値及び分散値は、(2)式を用いて求めた。

$$\gamma_{ij} = 0.424(1.0 - \exp\left[-\frac{|Xi - Xj|}{2.5}\right]) \tag{8}$$

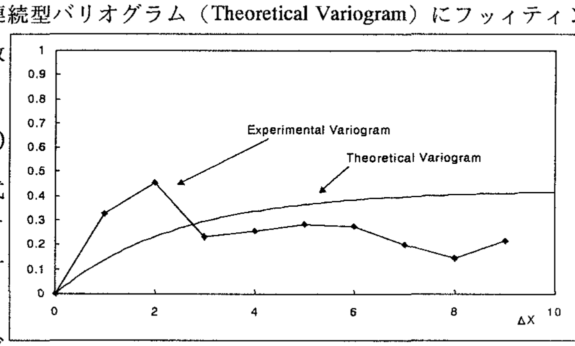

図-1　バリオグラム

図-2は、(4)式で与えられる条件付平均値、(5)式で与えられる条件付標準偏差および(2)式を用いて求めた場の標準偏差を示す。図-3における条件付標準偏差は、場の標準偏差を超えることはない。これは、条件が加わることにより不確定性が減少

していることを表している。

図-3は、漸次拡張方式[2)3)]によるシミュレート結果である。各点において3000サンプルを抽出し、その統計量（条件付平均値、条件付標準偏差）を図示した。図-2と図-3は、ほぼ一致している。

図-4において、推定点が観測点より離れた場合、つまり外挿では条件付平均値および条件付標準偏差が、それぞれ座標関数で推定した場の平均値と標準偏差に近づく。外挿では、観測点における値の影響を受けなくなり、条件付標準偏差は場の特性に近づくことを表している。図-5に、確率場の平均値の真値（(6)式）および(2)式より推定した平均値を示す。内挿部分では、真値と推定値にあまり差はみられないが、外挿部分では、推定しようとしている確率場とは全く異なるものとなっている。

4．まとめ

期待値および共分散関数が未知であるが、バリオグラムが観測値より推定可能なIntrinsic Random Fieldの条件付シミュレーション手法の数値的検証を、簡単な例題を用いて行った。確率場の期待値と確率場の特性を表すバリオグラムを観測値より推定するため、十分な数の観測値が必要となる。観測値の数が少ない場合は、推定精度が低くなると考えられる。また、外挿では、全く性質の異なる確率場を計算する場合があるため、適用しないほうがよいと考える。最後に、本研究を行うにあたり有益な助言をいただいた攻玉社工科短期大学大野春雄教授に感謝いたします。

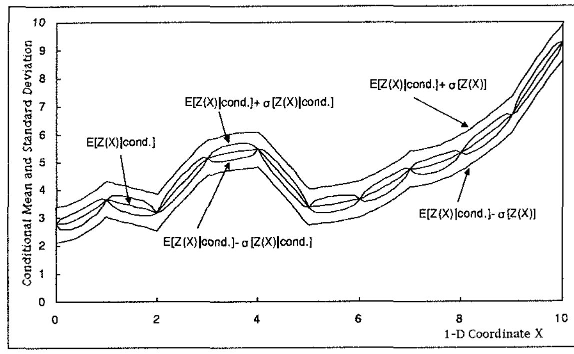

図-2　理論解

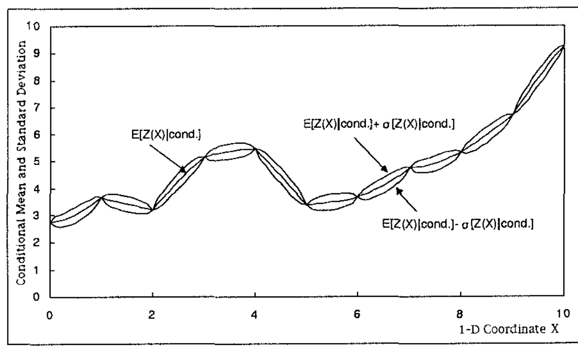

図-3　シミュレーション解(3000サンプル)

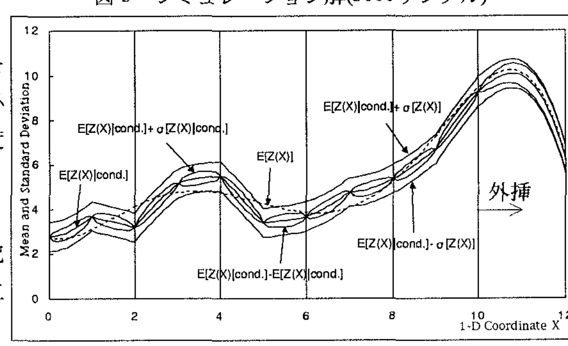

図-4　内挿および外挿

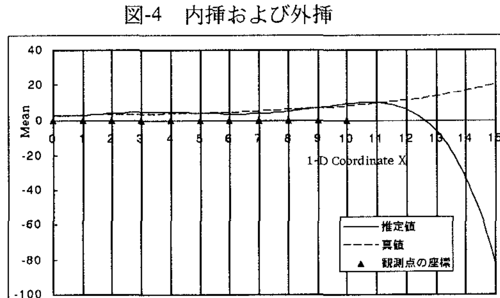

図-5　平均値

参考文献

1) 星谷　勝，山本欣弥，Intrinsic Random Field の条件付ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ，土木学第50回年次学術講演概要集，第１部(B)、pp.1290～1291，平成7年9月

2) 星谷勝，条件付確率場のシミュレーション理論，土木学会論文集No.459／Ⅰ-22，pp.113~118，1993.1

3) 星谷勝，桑名智英，条件付確率場のシミュレーション理論の検証，土木学会論文集No.477／Ⅰ-25，pp.93~96，1993.10

4) J.P.Delhomme，Kriging in the Hydrosciences，Advances in Water Resorces Vol.1，No.5，1978

5) G.Bastin，M.Gevers，Identification and Optimal Estimation of Random Fields from Scattered Point-wise Data，Automatica，Vol.21，No.2，pp.139~155，1985

6) Alfredo H-S.Ang，Wilson H.Tang，土木建築のための確率・統計の基礎，伊藤学，亀田弘行訳，丸善株式会社