

I-B 185 正規モード合成法による多孔質飽和弾性体の衝撃応答解析

東京理科大学 正会員 東平光生

1. まえがき

臨海地帯の軟弱地盤などは、単純な弾性材料として扱うよりも多孔質弾性体の間隙に水が飽和している、いわゆる多孔質飽和弾性体として扱う方が合理的な場合もある。最近になって、多孔質飽和弾性体中を伝播する波動解析を行う研究も増えてきているが、一方では多孔質飽和弾性体の正規モードを考察したり、その重ね合わせで時間領域のGreen関数を表現する研究はあまりなされていない。こうした観点から、本研究では多孔質飽和弾性体の衝撃応答解析のための正規モード合成法を展開し、実際にいくつかの数値計算を行ってみた。

2. 定式化

ここでは、Biot¹⁾²⁾の与えた骨格と間隙水の変位を未知量とする次の支配方程式を用いる。

$$(\lambda + \mu + \alpha^2 M) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \alpha M \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \partial_t^2 [\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \rho_f \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \cdots (1)$$

$$\alpha M \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + M \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \partial_t^2 [\rho_f \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + m \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] + b \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \quad \cdots (2)$$

ここに、 λ と μ はLaméの定数、 α と M はBiotの用いた構成則の係数、 ρ は飽和媒体の質量密度、 ρ_f は間隙水の密度、 m は間隙水の密度と間隙の形状によって決められる係数、 b は骨格と間隙水の摩擦の効果を示す係数である。また、 $\mathbf{u}$ は骨格の変位場、 $\mathbf{v}$ は間隙水と骨格の相対変位、 $\mathbf{x}$ は空間座標、 t は時間、 ∂ は偏微分の演算子で、下付きの添字で微分演算のパラメータを示す。また、 $\mathbf{f}$ は骨格に加わる外力場、 $\mathbf{p}$ は間隙水に加わる圧力場を表す。

本研究では骨格の変位および間隙水と骨格の相対変位をsurface vector harmonicsを用いて次のように表す。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [U_{zk_n}^m(z, t) \mathbf{R}_{k_n}^m(r, \phi) + U_{rk_n}^m(z, t) \mathbf{S}_{k_n}^m(r, \phi) + U_{\phi k_n}^m(z, t) \mathbf{T}_{k_n}^m(r, \phi)] \quad \cdots (3)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [V_{zk_n}^m(z, t) \mathbf{R}_{k_n}^m(r, \phi) + V_{rk_n}^m(z, t) \mathbf{S}_{k_n}^m(r, \phi) + V_{\phi k_n}^m(z, t) \mathbf{T}_{k_n}^m(r, \phi)] \quad \cdots (4)$$

ここに、 $\mathbf{R}_{k_n}^m$, $\mathbf{S}_{k_n}^m$ および $\mathbf{T}_{k_n}^m$ はsurface vector harmonicsである。定式化はsurface vector harmonicsの成分を求めるように進めて行くことになるが、ここではこのために薄層要素法でなく伝達マトリックス法を採用する。この理由はsurface vector harmonicsの成分 $U_{zk_n}^m$, $U_{rk_n}^m$, $U_{\phi k_n}^m$, $V_{zk_n}^m$, $V_{rk_n}^m$, $V_{\phi k_n}^m$ のうち、独立な変数は4成分であり、このことが薄層要素-離散化波数法の定式化を複雑にするためである。伝達マトリックス法を採用した場合、正規モードを求めるためには超越方程式として現れる特性方程式を解く必要が生じる。特にここでは支配方程式に現れる係数 b の存在により特性根は複素数となるが、複素根は次のNewton法をベースとしたスキームに従い求めた。

$$\omega_{j+1} = \omega_j - \frac{F(k, \omega_j)}{F'(k, \omega_j)} \quad j = 1, 2, 3, 4, \dots \quad \cdots (5)$$

$$F'(k, \omega_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(k, \omega)}{(\omega - \omega_j)^2} d\omega \quad \cdots (6)$$

ここに、 $F(k, \omega)$ は特性関数である。

正規モードの合成でGreen関数を構成する場合は正規モード間の直交関係式を誘導する必要があるが、この誘導のプロセスはStrum-Liouville方程式で論じられている方法と類似している。また、これらの正規モードを因果性を考慮して重ね合わせGreen関数を構成する方法は若干繁雑となり限られた紙面の都合上ここでは省略する。

3. 数値計算例

ここでは、Fig. 1 に示す解析モデルの衝撃応答を求める。Fig. 1 は剛基盤上に1.0 kmの厚さの多孔質飽和弾性体が堆積したモデルで、深さ0.5 kmの位置に鉛直上向きの点振源を与える。点振源の時間変動は単位階段関数によって記述されるものとする。多孔質飽和弾性体の材料定数はFig. 1 に示すとおりであり、振源の荷重の大きさは 1.0×10^{10} N とする。

Fig. 2 に多孔質飽和弾性体表面で観測される骨格の変位時刻歴を示す。変位は鉛直方向を示し観測点の位置は振源からの水平方向の距離として2 kmをとった。比較のため理想的な弾性体の応答結果も合わせてプロットしている。また、理想的な弾性体の応答計算は薄層要素-離散化波数法によった。Fig. 2の結果によると、多孔質弾性体の応答と理想的な弾性体の応答は、振幅には大きな差異が無いが、位相のは多孔質弾性体の応答の方が少し進んでいる。このことは、多孔質弾性体の波動の伝播速度が理想的な弾性体の波動の伝播速度よりも大きなことを示している。

4. まとめ

本研究では多孔質飽和弾性体の衝撃応答解析のためのモード合成法を展開し、実際に数値計算を実行した。衝撃応答解析結果から、多孔質飽和弾性体の波動の伝播速度は理想的な弾性体の波動の伝播速度よりも大きくなることがわかった。

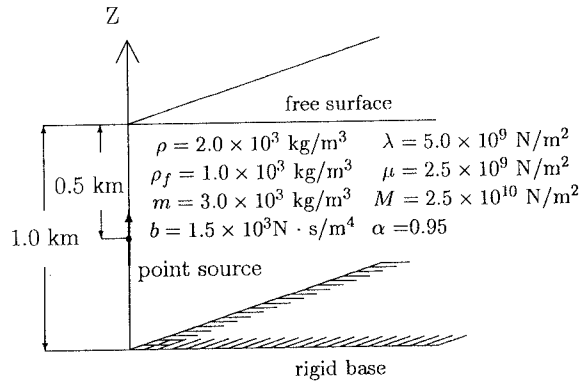


Fig. 1 Analyzed model in which poroelastic layer is resting on a rigid base.

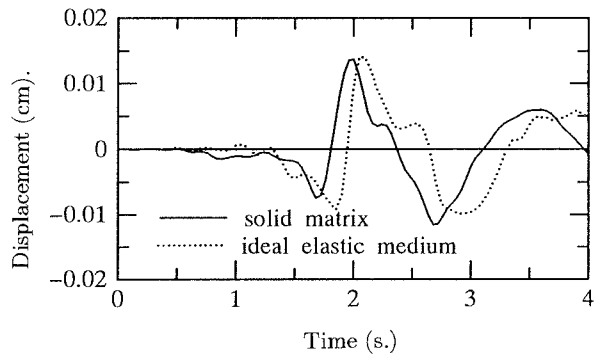


Fig. 2 Comparison of displacement. Displacement of solid matrix is compared to that of ideal elastic medium.

参考文献

- 1) Biot, M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I, low frequency range, *J. Acous. Soc. Am.*, **28**, 168-178.
- 2) Biot, M. A. (1962). Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *J. Appl. Phys.*, **33**, 1482-1498.