

I-B 167 自由端に集中面内力を受ける片持ち板の振動・座屈および動的安定性

長崎大学工学部 学生員 ○呉 明強

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

1. まえがき はりの断面に面内集中曲げ荷重が作用すると、横倒れ座屈が生じることが知られている¹⁾。はりの長さが短い場合やはりの高さが高い場合には、平板として取り扱いが必要であるが、これまで平板として取り扱いはないようである。また、平板に面内力が作用する場合の座屈特性はかなり解析されているが周期的変動面内力が作用する場合の動的安定性について、不十分な点は認められる。そこで、著者は、未解明の自由端に沿って面内集中荷重が作用する場合の片持ち長方形板を取り上げ、振動、座屈および動的安定をエネルギー法に基づく、Rayleigh-Ritz 法と Hamilton の原理を用いて解析する。数値解析において、長方形板の座屈、振動および動的安定性に及ぼす縦横比、静的および動的荷重の影響を明らかにする。

2. 片持ち板の自由端に面内集中荷重を作用する場合の面内力 図-1 に示すような片持ち長方形板の自由端に y 軸方向に面内集中荷重が作用する場合の面内力 N_x 、 N_{xy} は次のように与えられる。

$$N_x = -\frac{12(P_0 + P_t \cos \Omega t)}{b^3} \left(y - \frac{b}{2}\right)(a - x) \quad (1) \quad N_{xy} = -\frac{6(P_0 + P_t \cos \Omega t)}{b^3} \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3(P_0 + P_t \cos \Omega t)}{2b} \quad (2)$$

ここに、 P_0 : 静的集中荷重、 $P_t \cos \Omega t$: 周期変動集中荷重、 Ω : 励振円振動数、 P_t : 振幅

3. ポテンシャルエネルギーおよび解法 (1) 座屈及び固有振動解析 静的集中荷重 P_0 のみを受ける場合の長方形板の自由振動を考える。長方形板のひずみエネルギー V 、運動エネルギー T および面内力による仕事 U は、次のように与えられる。

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (3) \quad T(w) = \frac{\rho}{2} \int_0^b \int_0^a h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (4)$$

$$U(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (5)$$

ここに $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度、 E : ヤング率、 t : 時間、 ν : ポアソン比、 ρ : 板の密度、 w : たわみ、 h : 板厚、 a, b : 辺長。

この場合の全ポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$W(w) = V(w) + U(w) - T(w) \quad (6)$$

式(6)の一般解を次式のように仮定する

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \bar{h}_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \exp(i\omega t) \quad (7)$$

ここに、 $\bar{h}_m$: 片持ちばりの固有振動形、 $\bar{h}_n$: 両端自由ばりの固有振動形、 A_{mn} : 未定数、 $\xi = x/a$ 、 $\eta = y/b$ 、 ω : 固有円振動数。

次に、式(7)を式(6)に代入し、Rayleigh-Ritz 法を適用して、得られた式を偏微分すると次式となる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (E_{mrs} - \lambda_v^4 F_{mrs} - \lambda_b G_{mrs}) A_{mn} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $E_{mrs} = \frac{1}{\beta^4} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^1 + \frac{\nu}{\beta^2} (I_{mr}^3 \bar{I}_{ns}^2 + I_{mr}^4 \bar{I}_{ns}^3) + I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^5 + \frac{2(1-\nu)}{\beta^2} I_{mr}^5 \bar{I}_{ns}^4$ 、 $F_{mrs} = \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^8 \bar{I}_{ns}^1$ 、

$G_{mrs} = (8I_{mr}^6 \bar{I}_{ns}^6 + I_{mr}^7 \bar{I}_{ns}^7 + I_{mr}^8 \bar{I}_{ns}^8) \left(\frac{3}{2\beta} \right)$ 、 $\lambda_v^4 = \rho h \omega^2 b^4 / D$ (振動の固有値)、 $\lambda_b = P_0 b / D$ (座屈固有値、 $\omega = 0$ のとき)、

$\beta = a/b$: 縦横比、 $I_{mr}^1, \bar{I}_{ns}^2, \dots$: 固有関数の定積分 ($m, n, r, s = 1, 2, \dots, N$)

式(8)を行列表示し、 $\lambda_b = 0$ とおけば、面内力を作用しない ($P_0 = 0$) 場合の自由振動行列式が得られ、また慣

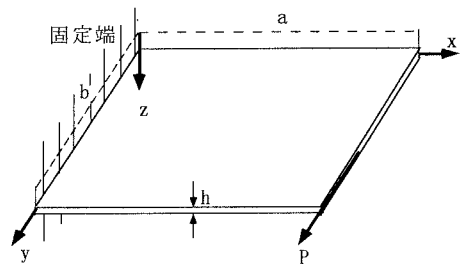


図-1 一般図

性項を無視すれば座屈行列式が得られる。

（2）動的安定解析 動的安定解析について、式の解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1} \sum_{n=1} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (9)$$

ここに、 $T_{mn}(t)$ ：未知の時間関数、 $W_{mn}(x, y)$ ：静的集中荷重が作用しない($P_0 = 0$)長方形板の固有振動形。

一般座標に関する運動方程式を誘導するために Hamilton の原理を適用し、行列表示すると、次式となる。

$$[I]\{\ddot{T}\} + [F]\{T\} + (\bar{P}_0 + \bar{P}_i \cos \bar{\omega} \tau)[G]\{T\} = \{0\} \quad (10)$$

式(10)は連立の Mathieu の方程式であり、 $[I]$ は単位行列、 $[F]$ は対角線に固有振動数比の2乗が並んだ対角行列、 $[G]$ は零要素を多く含む係数励振行列。また、式(10)の一般解を、次のようにフーリエ級数に仮定する²⁾。

$$\{T\} = e^{i\lambda \tau} \left\{ \frac{1}{2} \{b_0\} + \sum_{k=1} \left(\{a_k\} \sin k \bar{\omega} \tau + \{b_k\} \cos k \bar{\omega} \tau \right) \right\} \quad (11)$$

ここに、 λ ：未定定数、 $\{b_0\}, \{a_k\}, \{b_k\}$ ：未知のベクトル。

式(11)を式(10)に代入し、調和バランス法を適用して、次に、2倍サイズの固有値問題に変換する方法を用いる。これにより、固有値 λ が求められ、不安定領域を判定することができる。

4. 数値結果

（1）座屈解析 解析精度を直接検討する文献がないので、はりの横倒れ座屈の解析結果¹⁾と比較すると、図-2の結果となる。図-2で縦軸は座屈固有値 λ_b を示し、横軸は縦横比 β を示している。縦横比 β が小さくなると、板とはりとの固有値が一致しなくなる。つまり、 β は5より小さい場合には板として、取り扱わなければならない。

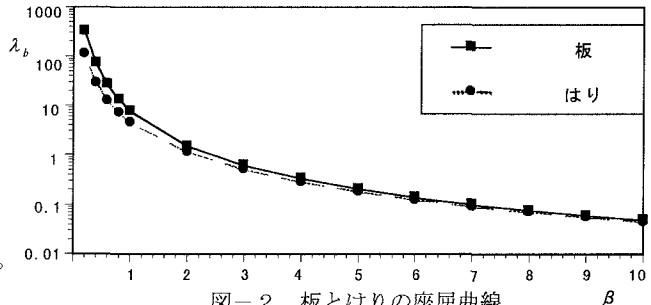


図-2 板とはりの座屈曲線

（2）動的安定解析 本研究では、1次振動の20倍までの加振振動数の範囲の不安定領域を対象とする。図-3には $\bar{P}_0 = 0$ の場合の正方形板の動的不安定領域を示し、左下がりの斜線が単純共振を表し、右下がりの斜線が結合共振を表す。また、縦軸は無次元周期変動荷重の振幅 $\bar{P}_i$ で、横軸は励振振動数 $\bar{\omega}$ である。図-3により単純共振の副不安定領域 ω_y と結合共振の主不安定領域 $\omega_y + \omega_{mn}$ が得られている。不安定領域の幅は結合共振が単純共振よりも広い。したがって集中荷重を受ける場合の平板の動的不安定領域は結合共振が支配的である。図-4に静的荷重 $\bar{P}_0 = 0.5$ が作用した場合の不安定領域を示す。静的荷重は正方形板の剛性を小さくするので固有振動数が減少し、不安定領域の幅を広くする効果をもつ。また不安定領域の種類が多くなる。

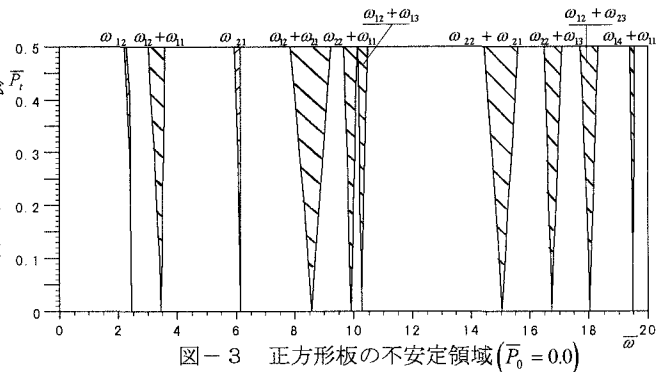


図-3 正方形板の不安定領域($\bar{P}_0 = 0.0$)

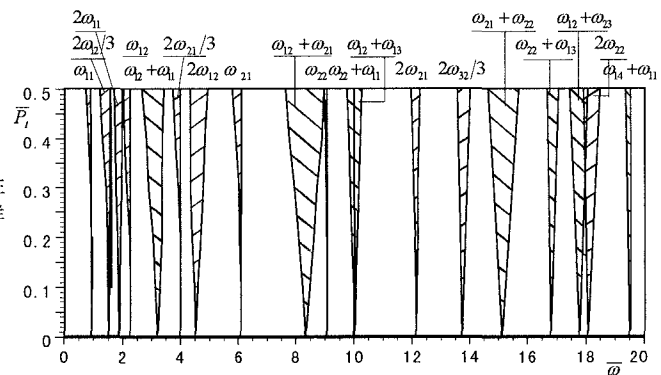


図-4 正方形板の不安定領域($\bar{P}_0 = 0.5$)

5. まとめ

振動と座屈との解析結果および動的安定性に及ぼす縦横比の影響について講演時に詳しく発表する。

参考文献

- 1) Japan, C.R.C.: Handbook of Structural Stability, Corona, pp.1-112, 1971.
- 2) Takahashi, K.: Parametric Instability of a Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.257-262, 1982.