

I-B 166

偏平アーチの非線形振動解析 — 多自由度系としての解析 —

長崎大学工学部 学生員○太田 晶一

長崎大学工学部 正 員 高橋 和雄

1. まえがき

近年、構造物の長大化に伴って、長さ比べて板厚が小さい薄肉材や薄板が採用されている。この種の薄肉構造部材では、製作過程、支持部の出来具合および自重の影響などによってライズが必ず存在する。このようなライズをもつはりや軸方向圧縮力を受けて座屈したはり、偏平アーチの一種とみなすことができる¹⁾。著者らは、これらの偏平アーチの1自由度の解析を行ってきたが²⁾、構造部材は連続体であるから、これを考慮するには、多自由度の解析が必要である。そこで、本研究では、2自由度までを採用し、1次以外のモードの非線形振動特性および1次振動近傍の分岐振動に及ぼす高次振動の影響を明らかにする。

2. 解法

偏平アーチに周期的変動荷重が作用する場合の非線形曲げ振動の運動方程式は次のように与えられる¹⁾。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{EA}{2\ell} \int_0^\ell \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = P_0 \cos \Omega t \quad (1)$$

ここに、 E ：ヤング率、 I ：断面2次モーメント、 A ：断面積、 ℓ ：スパン長、 ρ ：密度、 y_0 ：初期形状、 x ：スパン方向の座標、 t ：時間、 y ：たわみ、 p_0 ：荷重強度、 Ω ：荷重の円振動数。

初期形状は境界条件を満足しなければならないので、次のように関数表示されるものとする。

$$y_0 = \Delta r \bar{X}(x) \quad (2)$$

ここに $\Delta = \Delta_0 / r$ 、 Δ_0 ：ライズ、 r ：回転半径、 $\bar{X}(x)$ ：形状関数。

$$\text{式(1)の解を、次の変数分離形に仮定する。} y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (3)$$

ここに、 X_n ：座標関数、 T_n ：未知の時間関数。

式(2)、式(3)を式(1)に代入し、Galerkin法を適用すれば次のような時間に関する多自由度の連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \Delta^2 S_n^0 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^0 T_k + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(Q_k^0 R_{\ell n} + \frac{1}{2} S_n^0 P_{k\ell} \right) T_k T_\ell + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{k\ell m}^n T_k T_\ell T_m = \gamma_n p \cos \bar{\omega} \tau \quad (4)$$

ここに、 $\alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^2$ 、 $S_n^0 = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^\ell \frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} X_n d\xi$ 、 $Q_k^0 = \int_0^\ell \frac{d\bar{X}}{d\xi} \frac{dX_k}{d\xi} d\xi$ 、 $\xi = x / \ell$ 、

$R_{\ell n} = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^\ell \frac{d^2 X_\ell}{d\xi^2} X_n d\xi$ 、 $P_{k\ell} = \int_0^\ell \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_\ell}{d\xi} d\xi$ 、 $\beta_{k\ell m}^n = -\frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_\ell}{d\xi} d\xi \int_0^\ell \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} X_n d\xi / (\lambda_1^4 x_n)$ 、

$\gamma_n = \int_0^\ell X_n d\xi / (\lambda_1^4 x_n)$ 、 $p = p_0 \ell^4 / EI r$ 、 $\lambda_1 = \ell^4 \sqrt{\rho A \omega_1^2 / EI}$ 、 $x_n = \int_0^\ell X_n^2 d\xi$ 、 $\bar{\omega} = \Omega / \omega_1$ 、 ω_1 ：ライズの
ないはりの線形1次固有円振動数、 $\tau = \omega_1 t$ 。

3. 両端ヒンジの偏平アーチへの適用

両端ヒンジばりが、ライズの形状関数 $\bar{X} = \sin \pi \xi$ をもつ場合について系を1次振動と3次振動の2自由度系と仮定し減衰力を考慮すれば、式(4)は次式となる。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1 \alpha_1 \dot{T}_1 + \left(1 + \frac{1}{2} \Delta^2 \right) T_1 + \frac{3}{4} \Delta T_1^2 + \frac{9}{4} \Delta T_3^2 + \frac{9}{4} \Delta T_1 T_3^2 + \frac{1}{4} T_1^3 = \frac{4}{\pi^5} p \cos \bar{\omega} \tau \quad (5)$$

$$\ddot{T}_3 + 18h_3 \dot{T}_3 + 81T_3 + \frac{9}{2} \Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4} \Delta T_1^2 T_3 + \frac{81}{4} T_3^3 = \frac{2}{3\pi^5} p \cos \bar{\omega} \tau \quad (6)$$

ここに、 h_1, h_3 ：減衰定数、 $\alpha = \sqrt{1 + \Delta^2 / 2}$ 。

式(5)および(6)の解を次のように仮定する。

$$T_1 = c_{10} + c_{11/2} \cos \frac{\bar{\omega}\tau}{2} + s_{11/2} \sin \frac{\bar{\omega}\tau}{2} + c_{11} \cos \bar{\omega}\tau + s_{11} \sin \bar{\omega}\tau + c_{12} \cos 2\bar{\omega}\tau + s_{12} \sin 2\bar{\omega}\tau \quad (7)$$

$$T_3 = c_{30} + c_{32} \cos 2\bar{\omega}\tau + s_{32} \sin 2\bar{\omega}\tau + c_{31} \cos \bar{\omega}\tau + s_{31} \sin \bar{\omega}\tau \quad (8)$$

ここに、 $c_{10}, c_{11/2}, s_{11/2}, c_{11}, s_{11}, c_{12}, s_{12}$: 1次振動の振幅成分、 $c_{30}, c_{31}, s_{31}, c_{32}, s_{32}$: 3次振動の振幅成分。

式(7), (8)を式(5), (6)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られる。これにNewton-Raphson法を用いて解けば、振幅成分が得られる。式(5), (6)を4元連立の1階常微分方程式に変換し、Runge-Kutta-Gill法を適用して直接数値積分すれば、時間応答が得られる。

4. 数値結果

Fig. 1は、3次振動の自由振動曲線を示す。横軸は無次元円振動数 $\bar{\omega}$ 、縦軸は無次元振幅である。3次振動の線形固有振動数は、ライズ比 Δ の影響を受けず一定値 $\bar{\omega} = 9.0$ をとる。自由振動曲線において、運動方程式内の非線形項は $\Delta T_1 T_3, \Delta T_1^2 T_3$ および T_3^3 の項であるので、ライズ比 Δ が小さい場合には、ほぼ直線ばりと同じ挙動を示し、ライズ比 Δ が大きい場合でも振幅が大きくなると直線ばりと同じ硬化バネ特性を示す。

Fig. 2は、無次元円振動数 $\bar{\omega}$ と1次振動の振幅の直流成分 c_{10} との関係を示したものである。1次振動の振幅の直流成分 c_{10} は、無次元円振動数 $\bar{\omega}$ が増加すると、ライズ比 Δ を打ち消す方向（符号がマイナス）に作用する。さらに振幅が大きくなると、 $c_{10} \approx -\Delta$ となり、ライズの無いばりの振動をする。

偏平アーチにおいては、3次振動の自由振動が起きても1次振動は、変動成分 $c_{12} \cos 2\omega\tau$ が微小振動し、直流成分 c_{10} がライズ比 Δ を打ち消す方向に作用するのみである。

Fig. 3は、強制振動の無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ と無次元応答振幅との関係をライズ比をパラメータに示す。ライズ比が大きくなるにしたがい応答振幅も大きくなることが確認できる。

5. まとめ

ここでは、3次振動の自由振動曲線の特性を明らかにした。1次以外のモードの非線形振動特性および1次振動近傍の分岐振動に及ぼす高次振動の影響については、講演時に発表する。

参考文献

- 1) 八巻 昇：弾性体の非線形振動、日本機械学会、第373回講習会「非線形振動の理論と実際」教材、pp.31~50, 1973.
- 2) 高橋和雄、太田晶一：偏平アーチの非線形振動とカオス解析、構造工学論文集、Vol.42A, pp.55~61, 1996.3.

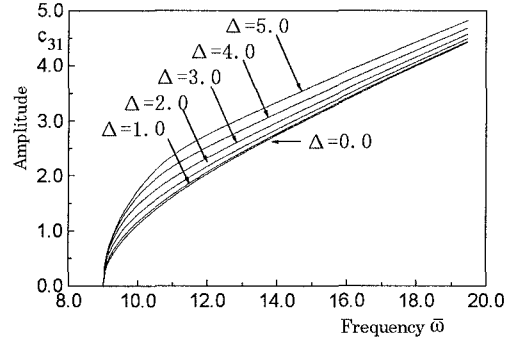


Fig.1 Amplitude-frequency curves ($p = 0.0, h = 0.0$)

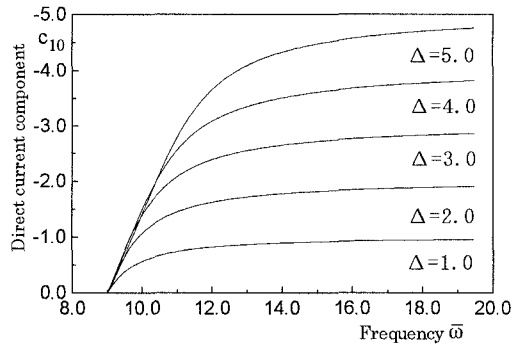


Fig.2 Direct current component-frequency

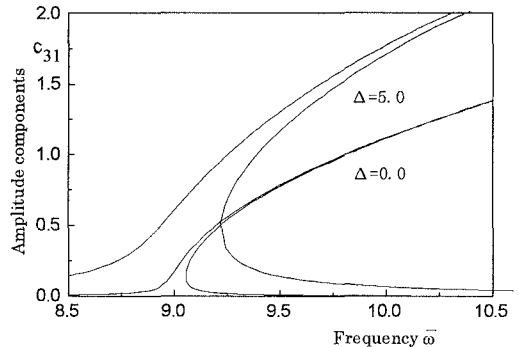


Fig.3 Frequency-response curves
($p = 40.6 (\Delta = 0.0), p = 590.5 (\Delta = 5.0), h = 0.005$)