

I-B 142

多層矩形板の応力波伝播解析

大阪市立大学工学部 正会員 石丸 和宏
同 上 正会員 小林 治俊
同 上 フェロー 園田恵一郎

1. はじめに

合成構造は工学分野においてよく用いられており、多層板はその典型的な構造である。著者ら[1]は先に多層円板の衝撃応答特性を解明するために、三次元動弾性論に基づく固有関数展開法を用いて、その動的挙動を明らかにした。本研究では多層矩形板を取り扱い、その一般解法を示すとともに、数値計算においてコンクリート板の上下面に鋼板が接着したサンドイッチ矩形板を対象にその動特性を示す。

2. 解析方法

図1は取り扱う k 層よりなる多層矩形板の座標系で、座標 $x_i = (x, y, z_i)$ 方向の変位を $u_i = (u_i, v_i, w_i)$ とし、添字 $i = (1 \sim k)$ をもって i 層目の諸量を表す。矩形板の全層厚は h 、各層厚は h_i で各層間は完全接着されているものとする。また辺長は a, b である。 λ_i, μ_i を Lamé の定数、 ρ_i を密度とすれば、多層矩形板の変位で表される運動方程式は

$$\mu_i \nabla_i^2 u_i + (\lambda_i + \mu_i) \nabla_i (\nabla_i \cdot u_i) = \rho_i \ddot{u}_i \quad (1)$$

ここに、 $\nabla_i = \partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z_i$ 、 $\nabla_i^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z_i^2$ 、ドットは時間微分 $(\dot{}) = \partial()/\partial t$ である。

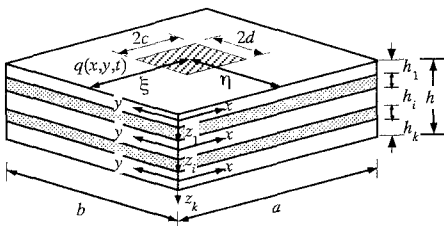


図1 多層矩形板の座標系

支持条件を単純支持とすれば、上下面の境界条件および各層間の連続条件は次のようになる。

$$v_i = w_i = \sigma_{x,i} = 0 \quad (x=0, a), \quad u_i = w_i = \sigma_{y,i} = 0 \quad (y=0, b) \quad (2,3)$$

$$\sigma_{z,1} = -q(x, y, t), \quad \tau_{yz,1} = \tau_{zx,1} = 0 \quad (z_1 = -h_1/2) \quad (4)$$

$$u_i = u_{i+1}, \quad v_i = v_{i+1}, \quad w_i = w_{i+1}, \quad \sigma_{x,i} = \sigma_{x,i+1}, \quad \tau_{yz,i} = \tau_{yz,i+1}, \quad \tau_{zx,i} = \tau_{zx,i+1} \quad (z_i = h_i/2, z_{i+1} = -h_{i+1}/2) \quad (5)$$

$$\sigma_{z,k} = \tau_{yz,k} = \tau_{zx,k} = 0 \quad (z_k = h_k/2) \quad (6)$$

載荷される前の矩形板は静止しているものとする初期条件は、

$$u_i = v_i = w_i = 0, \quad \dot{u}_i = \dot{v}_i = \dot{w}_i = 0 \quad (t=0) \quad (7)$$

運動方程式の解を次のように与える[1]。

$$u_i = u_i^*(x_i, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} Q_{mnl}(t) U_{mnl,i}(x_i) \quad (8)$$

ここに、 $u_i^*(x_i, t)$ は慣性力の影響を無視した場合の準静的解、 $Q_{mnl}(t)$ 、 $U_{mnl,i}(x_i)$ はそれぞれ未定の時間関数および固有関数(振動モード関数)である。また、 mnl はそれぞれ xyz 方向の波数を表す。

式(8)を式(1)に代入し、準静的問題および自由振動問題のつり合い式を考慮するとともに、固有関数の直交性を利用すると、 $Q_{mnl}(t)$ に関する次の微分方程式が得られる。

$$\ddot{Q}_{mnl}(t) + \omega_{mnl}^2 Q_{mnl}(t) = \ddot{Z}_{mnl}(t) \quad (9)$$

ここに ω_{mnl} は固有振動数、また Z_{mnl} の内容は

$$Z_{mnl}(t) = -\frac{1}{N_{mnl}^2} \sum_{i=1}^k \int_0^a \int_0^b \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \rho_i u_i^* U_{mnl,i} dx_i \quad (10)$$

であり、 N_{mnl} は固有関数のノルムである。

$$N_{mnl}^2 = \sum_{i=1}^k \int_0^a \int_0^b \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \rho_i U_{mnl,i}^2 dx_i \quad (11)$$

初期条件(7)のもとで式(9)の解は、

$$Q_{mnl}(t) = Z_{mnl}(0) \cos \omega_{mnl} t + \frac{\dot{Z}_{mnl}(0)}{\omega_{mnl}} \sin \omega_{mnl} t + \frac{1}{\omega_{mnl}} \int_0^t \ddot{Z}_{mnl}(\tau) \sin [\omega_{mnl}(t-\tau)] d\tau \quad (12)$$

3. 数値計算例

数値計算ではコンクリート板の上下面に鋼板が接着したサンドイッチ構造の3層正方形板を取り扱う。板厚比は $h/a = 0.2$ 、層厚比は $h_1:h_2:h_3 = 1:8:1$ とし、鋼、コンクリートの密度 ρ 、ヤング率 E 、ポアソン比 ν は、(1) 鋼； $\rho = 7.85 \text{ tf/m}^3$ 、 $E = 2.1 \times 10^7 \text{ tf/m}^2$ 、 $\nu = 0.3$ 、(2) コンク

リート； $\rho=2.3\text{tf/m}^3$ ， $E=2.4\times 10^6\text{tf/m}^2$ ， $\nu=0.167$ である。荷重は空間に関しては正方形板の上面中央($\xi=\eta=a/2$)に荷重強度 q_0 の等分布部分荷重が載荷幅 $2c/a=2d/a=0.2$ に作用し，時間に関してはステップ荷重とした [$q(x,y,t)=q_0H(t)$]。また，応答計算は無次元時間 $\tau(=c_1t/h)$ で取り扱う。ここに c_1 はコンクリート内を進む縦波の速度であり， $\tau=1$ は全ての層をコンクリートとした場合に縦波が全板厚 h を進む時間を意味している。応答計算に使用した級数の項数は収束性を考慮し m, n, l をそれぞれ 50, 50, 500 項採用した。

図2は中心軸上($x=y=a/2$)の板厚方向応力 σ_z の応答である。載荷面中央($\xi=\eta=a/2$)から発生した応力波(縦波)が到達するまではどの着目点においても応答に変動はなく，この応力波が到達した後は鋼板内で頻繁に反射をくり返した応力波の到達による小刻みで不連続な応答が見られる。上接合面での最初の応答は荷重値よりも小さい。これは載荷面で発生した応力波(縦波)が剛性の高い鋼層から剛性の低いコンクリート層に透過すると応力値が低減するためである。ここに示した時間帯やそれ以降においても，上層中央や上接合面そして中間層中央では見られない引張応答が，下接合面や下層中央では見られる。

図3は中心軸上の曲げ応力 σ_x の応答を示している。上面においては衝撃瞬時($\tau=0$)に $\sigma_x=-0.43q_0$ の値を持つ。これは作用圧縮荷重 q_0 とつり合う圧縮応力 $\sigma_x=-q_0$ による xy 面内のひずみが拘束されるためである。この影響のために上下接合面における最初の応答値は圧縮を示す。コンクリートの上下面に剛性のより高い鋼板が接着しているために，上下の鋼板に応力が集中し，上下面での最大応答値は絶対値でほぼ同程度である。また上下接合面の応力値についても同様にそれらの最大応答値は絶対値でほぼ同じ値である。

図4は静的せん断応力が最も大きくなる $x=0, y=a/2$ 軸上のせん断応力 τ_{xz} の応答である。各着目点のごく初期($\tau\leq 5$)の応答は，最大応答値を示す位相とは逆位相の応答を示していることが分かる。またいずれの応答曲線も静的解をほぼ中心にして振動しているが，最大動的応答倍率は3倍を超えた値を示している。

参考文献

- [1] 小林治俊，園田恵一郎，石丸和宏：鋼・コンクリート合成円版の弾性衝撃応答解析，構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 1497-1504, 1992.

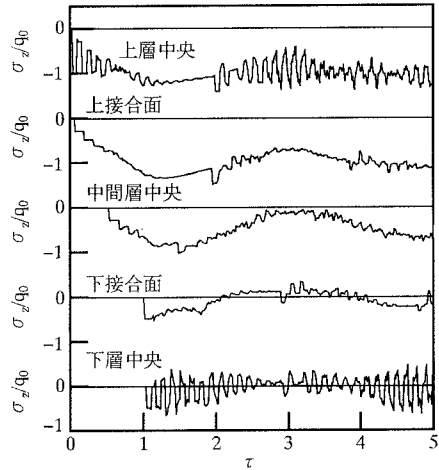


図2 中心軸上の応力 σ_z の応答

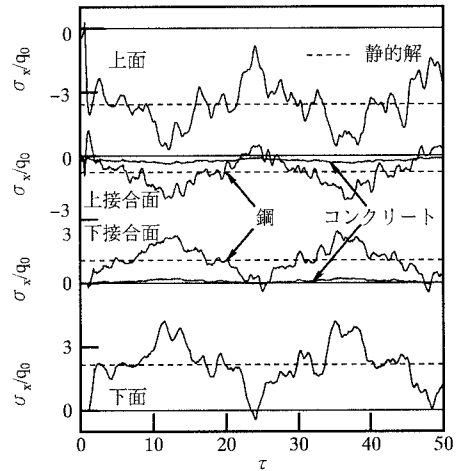


図3 中心軸上の応力 σ_x の応答

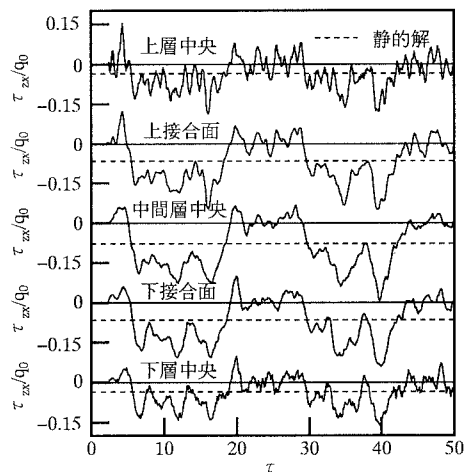


図4 $x=0, y=a/2$ 軸上のせん断応力 τ_{xz} の応答