

I-B 70

そりねじりを考慮した立体骨組構造の固有振動数の精度について

北海道大学工学部 正 員 林川 俊郎

北海道大学工学部 学生員 武村 信也

北海道大学工学部 正 員 佐藤 浩一

1. まえがき

構造物の動的応答は、構造物に作用する外力の性質と、構造物自身が有する固有振動性状に依るところが大きい。したがって、構造物の動的応答を調べるためには、固有振動数および固有振動モードをできるだけ精度良く計算することが重要である。一般的に構造物の固有振動解析は質量のモデル化により、離散座標系と分布座標系による解に分類される。分布座標系による解は厳密解であるが、離散座標系による解は近似解となるため、その動的応答の評価には固有値の精度が問題となることがある。筆者らは、連続桁橋、アーチ橋、ラーメン橋などの平面骨組構造物の固有値の精度について数学的に、また数値計算によって検討してきた^{1)・2)}。しかし、そりねじり変形（または曲げねじり変形）を考慮した立体骨組構造の固有値の精度についての研究はまだ数少ないように思われる。そこで本研究では、そりねじりを考慮した立体骨組構造の固有振動解析を行い、求められる固有振動数の精度について検討するものである。

2. 固有振動解析

一般に構造物の固有振動解析においては、集中質量法(Lumped Mass Method)や整合質量法(Consistent Mass Method)といった離散座標系の手法が広く用いられている。一方、分布座標系の手法である連続質量法(Continuous Mass Method)は、部材要素の自由振動を支配する基礎微分方程式の一般解を用いて剛性マトリックスを組み立て、厳密解が得られる反面、構造物全体の自由度が大きくなると固有値解析が容易に行えない場合があり、必ずしも汎用的な手法とは言い難い。

中実断面あるいは閉じ断面部材で構成された立体骨組モデルの固有振動解析では、軸変形、面内および面外の曲げ変形、St.Venant のねじり変形を考慮すれば十分であると言われている。しかし、薄肉開き断面部材より構成される骨組モデルにおいては、そりねじり変形の影響を無視することができないと考えられる。そこで、分布座標系における骨組部材のそりねじり変形の取り扱いについて以下に示す。

3. 分布座標系におけるそりねじり

部材要素断面が2軸対称であるとする、部材要素のそりねじり問題を支配する基礎微分方程式は次式のようになる。

$$EC_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + m r_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 E はヤング係数、 C_w はそりねじり定数、 G はせん断弾性係数、 K はSt.Venant のねじり定数、 m は単位長さあたりの質量、 $r_s^2 = (I_y + I_z) / A$ である。

式(1)の一般解から固有剛性マトリックス $K(\omega)$ を導くと、 $K(\omega)$ は固有円振動数 ω を含む 4 行 4 列の正方対称マトリックスとなり、その具体的な要素 k_{ij} は次の通りである³⁾。

$$\begin{aligned} k_{11} &= (\mu^2 + \nu^2) (\nu \cos \mu l \sinh \nu l + \mu \sin \mu l \cosh \nu l) \\ k_{12} &= (\nu^2 - \mu^2) (1 - \cos \mu l \cosh \nu l) - 2\mu \nu \sin \mu l \sinh \nu l, \quad k_{13} = -(\mu^2 + \nu^2) (\mu \sin \mu l + \nu \sinh \nu l) \\ k_{14} &= (\mu^2 + \nu^2) (\cos \mu l - \cosh \nu l), \quad k_{22} = (\mu^2 + \nu^2) (\sin \mu l \cosh \nu l / \mu - \cos \mu l \sinh \nu l / \nu) \\ k_{24} &= -(\mu^2 + \nu^2) (\sin \mu l / \mu - \sinh \nu l / \nu), \quad k_{23} = -k_{14}, \quad k_{33} = k_{11}, \quad k_{34} = -k_{12}, \quad k_{44} = k_{22} \\ \alpha &= EC_w / \{ 2(1 - \cos \mu l \cosh \nu l) + (\nu^2 - \mu^2) / (\mu \nu) \sin \mu l \sinh \nu l \} \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、係数 α はすべての要素 k_{ij} に掛けられ、係数 μ 、 ν 、 λ は以下の通りである。

$$\mu = \sqrt{GK / 2EC_w(\lambda - 1)}, \quad \nu = \sqrt{GK / 2EC_w(\lambda + 1)}, \quad \lambda = \sqrt{1 + 4mr_s^2 EC_w \omega^2 / (GK)^2} \quad (3)$$

式(2)で求められた固有剛性マトリックス $K(\omega)$ は、静的な問題と同様に重ね合わせの原理が適用できる。した

がって、重ね合わせにより構造物全体の動的な剛性マトリックスを作成し、境界条件による拘束節点処理を行うと、最終的に分布座標系における構造物の振動数方程式は次のようになる。

$$\det[\mathbf{K}(\omega)] = 0 \quad (4)$$

上式は一般的に ω に関する超越方程式となるため、本研究では Regula-Falsi 法により固有円振動数 ω を計算した。

4. 数値解析結果

図-1 に示すような2層立体骨組モデルについて数値計算を行った。部材要素断面は2軸対称であるとし、断面諸元は $A=11.75(\text{cm}^2)$ 、 $I_y=41.66(\text{cm}^4)$ 、 $I_z=93.75(\text{cm}^4)$ 、 $K=1.823(\text{cm}^4)$ 、 $C_w=603.6(\text{cm}^6)$ 、 $w=9.235 \times 10^{-2}(\text{kg/cm})$ である。境界条件は、最下部の4つの支点で3方向の変位、回転角、およびそりねじりに対して固定支持である。集中質量法と整合質量法では1部材につき2分割し、全体の要素分割数は32分割、連続質量法では長さ3mの部材のみ2分割し全体で20分割とした。数値計算は St. Venant のねじりのみを考慮した場合とそりねじりを考慮した場合それぞれについて前述の3通りの方法で行った。

表-1 では、3者の方法により求められた固有円振動数の値を比較している。整合質量法による解は厳密解に比べてやや大きめの値を与え、集中質量法による解は小さめの値を与える傾向がある。同じ要素分割数では、集中質量法よりも整合質量法の方が良い精度で解が求められていることがわかる。特に整合質量法により求められた固有円振動数は、8次固有振動モードまで0.1%以内で計算されている。

離散座標系による近似解 ω と、連続質量法による厳密解 ω^* との比を各固有振動モードに対して示したものが図-2 である。一般的に、固有モード次数が高くなるにつれて、固有円振動数の精度が悪くなる傾向がある。また、そりねじりを無視した場合（○印）とそりねじりを考慮した場合（×印）における解の精度は固有振動モード次数によらず、ほぼ同一である。この理由としては、図-1 の立体骨組構造が直線部材のみにより構成され、比較的そりねじり定数 C_w が小さいためと考えられる。

5. あとがき

本研究は、そりねじりを考慮した立体骨組構造の固有振動解析を集中質量法、整合質量法、連続質量法の3通りの方法を用いて行い、得られた解の精度を比較したものである。整合質量法による解は厳密解に対して上界値を、集中質量法による解は下界値を与えている。また、要素分割数が同じならば整合質量法の方が精度良く解が求まっている。図-1 に示した2層立体骨組モデルでは、そりねじりを考慮した場合でも St. Venant のねじりのみを考慮した場合と比べて解の精度に顕著な差はみられなかった。

【参考文献】

- 1) Hayashikawa, T. and Watanabe, N. : Free Vibration Analysis of Continuous Beams, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 111, No. 5, May, 1985, pp. 639-652.
- 2) 林川俊郎 : Vレグラーメン橋の固有振動解析とその精度の検討について、構造工学論文集, Vol. 35A, 1989年3月, pp. 719-725.
- 3) 林川俊郎・武村信也・佐藤浩一 : 曲げねじりを考慮した立体骨組モデルの固有周期と精度について、土木学会北海道支部論文報告集, 第52号(A), 1996年2月, pp. 366-369.

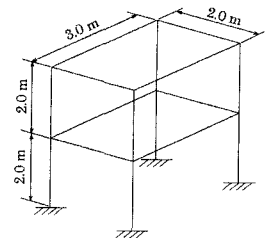


図-1. 2層立体骨組モデル

表-1. 固有円振動数一覧 (rad/sec)

Mode order	Lumped	Consistent	Continuous
1	27.443 (-0.411)	27.559 (+0.008)	27.557
2	30.774 (-0.798)	31.022 (+0.003)	31.022
3	31.282 (-6.317)	33.374 (+0.012)	33.369
4	85.949 (-1.882)	87.850 (+0.079)	87.584
5	101.358 (-8.825)	108.832 (+0.080)	108.768
6	111.171 (-3.865)	115.728 (+0.064)	115.657
7	114.404 (-3.174)	118.208 (+0.043)	118.186
8	155.141 (-6.327)	165.788 (+0.100)	165.628
9	165.421 (-9.130)	183.920 (+1.036)	182.077
10	165.616 (-9.149)	184.162 (+1.022)	182.309

Note ; () = $(\omega - \omega^*) / \omega^* \times 100 (\%)$

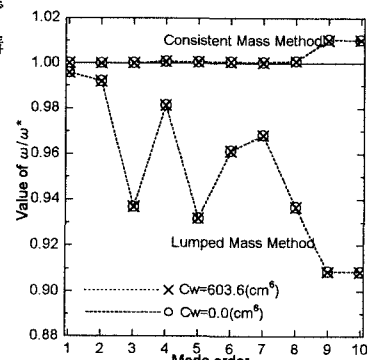


図-2. 固有円振動数の精度比較