土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I－A 470　　クリッギングによる初期通過確率の推定

武蔵工業大学　正会員　星谷　勝

1. 目的

確率過程論による振動解析において，初期通過確率の研究は重要課題であり多くの研究成果が発表されている[1)]．最近ではDouble and Clump法[2)]やPath Integral Method [3)]の提案もなされている．

本研究はKriging手法を適用して，この確率を比較的簡単な形で誘導する．なお，対象の確率過程x(t)には制約を与えず，非ガウス系非定常過程にも適用できる一般的な式を展開している．

2. 問題の設定

初期通過確率は次式で定義される．

$$P_s = P(T_f \geq T) = P\{|x(t)| \leq \lambda\ ;\ 0 \leq t \leq T\} \tag{1}$$

(2)式の指標関数(Indicator Function)を導入すると時間刻みΔでx(t)を離散化した後，(1)式は次の(3)式のように変換される．

$$I(k) = 1 \quad \text{if } |x(k\Delta)| \leq \lambda \quad \text{または，} \quad 0 \quad \text{if } |x(k\Delta)| > \lambda \tag{2}$$

ここで，$k = 0,1,\cdots,n$，$T = n\Delta$

$$P_s = P(I(0)=1)P(I(1)=1|I(0)=1)P(I(2)=1|I(1)=I(0)=1)\cdots P(I(k)=1|I(k-1)=I(k-2)=\cdots=I(0)=1)$$
$$\cdots P(I(n)=1|I(n-1)=I(n-2)=\cdots=I(0)=1) \tag{3}$$

x(t)を振動系の応答波形とするならば，一般に$x(k\Delta)$は数ステップ時刻前の状態には依存するが，はるか以前の応答値とは相関が低い．そこで(3)式の条件付き確率の条件の尻尾を切って，

$$P_s \fallingdotseq P(I(0)=1)P(I(1)=1|I(0)=1)\cdots P(I(k)=1|I(k-1)=I(k-2)=\cdots=I(k-m)=1)$$
$$\cdots P(I(n)=1|I(n-1)=I(n-2)=\cdots=I(n-m)=1) \tag{4}$$

但し，$m \geq 1$とする．m=1の場合，x(t)をマルコフ過程と見なしたことに相当する．

さて，(4)式の第k項の確率を解析的に求めるにはx(t)に関するm+1次の結合密度関数から$k\Delta$時刻の条件付き確率密度関数を導き，それを積分することで求めるが困難を伴う．本研究では第k項の算定にKriging法を適用し，(4)式のP_sを推定する手法を誘導する．

3. SolowによるSimple Indicator Kriging[4)]

(4)式の第k項を推定するために，次式の確率に注目してみる．

$$P_k = P\{I(k)=1|I(k-j), j=1,2,\cdots,m\} \tag{5}$$

(5)式は条件が確定していないので(4)式の第k項とは異なり，P_kはそれ自身が確率変数となっている．このP_kを次式を用いて近似推定する．

$$I^*(k) = w_k + \sum_{j=1}^{m} w_{k-j} I(k-j) \tag{6}$$

$I^*(k)$は$I(k-j)$に依存する確率変数であり，(5)式のP_kと(6)式の$I^*(k)$との自乗誤差の期待値を最小にするように未知の重みw_{k-j}, $j=0,1,\cdots,m$を決定することが自然に思われるが，$I^*(k)$が不偏推定式となるように次式の最小化により重みを決定することにする．

$$E\left[\varepsilon_k^2\right]=E\left[\left\{I(k)-I^*(k)\right\}^2\right] \rightarrow \text{minimum} \tag{7}$$

これを実行すると，重みは次のように求まる．

$$w_k=p_1(k)-\sum_{j=1}^{m} w_{k-j}p_1(k-j) \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{m} C_{k-j,k-\ell}w_{k-j}=C_{k,k-\ell} \quad ,\ell=1,2,\cdots,m \tag{9}$$

但し，

$$\left.\begin{array}{l} p_1(k)=P(I(k)=1)=E[I(k)], \quad p_{kj}=P(I(k)=1\cap I(j)=1)=E[I(k)I(j)] \\ C_{k-j,k-\ell}=p_{k-j,k-\ell}-p_1(k-j)p_1(k-\ell) \end{array}\right\} \tag{10}$$

4. $I^*(k)$の特性

a)　期待値をとると$E[I^*(k)]=E[P_k]=p_1(k)$が成立する．故に，$I^*(k)$はP_kの不偏推定式である．

b)　(8)式(9)式が成り立つとき自乗誤差の期待値は $E\left[\varepsilon_k^2\right]=C_{k,k}-\sum_{j=1}^{m} w_{k-j}C_{k,k-j}$ (11)

c)　x(t)がマルコフ過程ならば，$I^*(k)=w_k+w_{k-1}I(k-1)$ (12)

このとき，I(k-1)=1とすると最適推定値 $I^*(k)=P(I(k)=1|I(k-1)=1)$ となり，厳密解となる．このことはx(t)の性質を考えると，(6)式の推定式$I^*(k)$がかなり精度のよい推定式になる可能性を示唆している．

5. 初期通過確率

(5)，(6)式から，

$$P(I(k)=1|I(k-1)=\cdots=I(k-m)=1) \fallingdotseq I^*(k)|\{I(k-1)=\cdots=I(k-m)=1\}=\sum_{j=0}^{m} w_{k-j} \tag{13}$$

(13)式を用いると(4)式のP_sは次式で与えられる．

$$P_s=p_1(0)\left(\sum_{j=0}^{m} w_{1-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} w_{2-j}\right)\cdots\left(\sum_{j=0}^{m} w_{k-j}\right)\cdots\left(\sum_{j=0}^{m} w_{n-j}\right) \tag{14}$$

(14)式はx(t)が定常・非定常またはガウス性・非ガウス性を問わず適用できる一般解となっている．

6. 特殊な場合

x(t)が定常ガウス過程で平均値0のマルコフ性を有するとき，m=1として(14)式は，

$$P_s=p_1(0)\{p_{12}/p_1(0)\}^n \tag{15}$$

設定レベルを$\lambda=\ell\sigma_x$（σ_x：標準偏差）とすればx(t)がガウス過程であることから

$$p_{12}/p_1(0)=\frac{1}{2\Phi(\ell)-1}\left\{2\int_{-\ell}^{\ell}\varphi(z)\Phi\left(\frac{\ell-\rho z}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)dz-2\Phi(\ell)+1\right\} \tag{16}$$

但し，$\varphi(\,)$，$\Phi(\,)$はそれぞれ標準ガウス密度関数，分布関数である．ρは時間刻み幅Δ間の相関係数である．

参考文献

1) 星谷　勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会.

2) H.J. Pradlwater, G.I.Schuëller and P.G. Melnik-Melnikov, Reliability of MDOF System, Prob. Eng. Mech. No.9, 1994, pp.235-243.

3) Naess, A. and Johnson, J.M., Response Statistics of Nonlinear Dynamic Systems by Path Integration, Proc. of IUTAM Symp. on Nonlinear Stochastic Mechanics, Torino, Italy, July 1991.

4) A.R. Solow, Mapping by Simple Indicator Kriging, Mathematical Geology, Vol.18, No.3, 1986, pp.335-352.