土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I－A 467　任意の非正規確率場における条件付シミュレーション

清水建設和泉研究室　正会員　稲田　裕
武蔵工業大学工学部　正会員　星谷　勝
鳥取大学工学部　正会員　野田　茂

1. はじめに

観測データをもとに確率場の更新を行う条件付確率場の推定問題は、逆解析、補間、フィルタリング等工学上広く適用されており、土木分野においても土質定数の推定や地震動の予測等多くの研究が進められてきた。著者の一人は正規確率場についてKrigingを用いた新しい条件付確率場のシミュレーション手法を提案した[1]。しかし、非正規分布に従う条件付確率場の研究はこれまであまり行われていない。野田、星谷[2]は対数正規確率場を対象に条件付確率場の推定理論を導き、条件付分散と最適推定値の推定誤差分散が異なる等の新しい知見を示した。本報告では、対数正規分布に限らない任意の非正規分布に従う条件付確率場の推定手法を示す。さらに提案するシミュレーション手法について数値計算による検証を行い、いくつかの計算例によりその有効性を示す。

2. 問題の設定

ある非正規・非定常確率場の離散空間位置 i における変数の値を x_i とする。そして $(n-1)$ ヶ所の点について観測値のベクトル $\mathbf{X}_{n-1}=\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}^T$ が得られたとして、未観測点 n におけるサンプル実現値のシミュレーションを行う。ただし変数 x_i $(i=1,\cdots,n)$ について、i) 各変数の周辺分布は既知で、任意の点 i における平均 μ_i および分散 σ_i^2 は得られ、ii) 点 x_i と点 x_j の相関係数 ρ_{ij} は任意の点間について求めることができると仮定する。

3. 非正規条件付確率場の推定理論

変数 $\mathbf{X}_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ が等価正規変換により標準正規変数 $\mathbf{Z}_n=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$ に変換でき、各非正規確率変数 x_i が標準正規変数 z_i の関数として次のように表されるとする。

$$x_i=F_{X_i}^{-1}\{\Phi(z_i)\}\equiv g(z_i) \tag{1}$$

ただし、$F_{X_i}(x_i)$ は x_i の周辺確率分布関数、$\Phi(z_i)$ は標準正規確率分布関数であり、$g(z_i)$ は非減少関数とする。このとき相関係数マトリクスを $\mathbf{R}_n$ とおくと $\mathbf{X}_n$ の結合確率密度関数は、

$$f_{\mathbf{X}_n}(\mathbf{X}_n,\mathbf{R}_n)=\varphi_n(\mathbf{Z}_n,\mathbf{R}'_n)/\{g'(z_1)g'(z_2)\cdots g'(z_n)\} \tag{2}$$

となる。ここで $\varphi_n(\mathbf{Z}_n,\mathbf{R}'_n)$ は相関係数マトリクス $\mathbf{R}'_n$ の n 次元の標準正規結合確率密度関数である。したがって、x_n の条件付確率密度関数は次式で表される。

$$f_{x_n}(x_n|x_i,i=1,\cdots,n-1)=\varphi_n(z_n|z_i,i=1,\cdots,n-1)/g'(z_n) \tag{3}$$

ただし $\varphi_n(z_n|z_n,i=1,\cdots,n-1)$ は条件付標準正規確率密度関数である。また相関係数マトリクス $\mathbf{R}'_n$ の要素 ρ'_{ij} と $\mathbf{R}_n$ の要素 ρ_{ij} の関係は次のようになる。

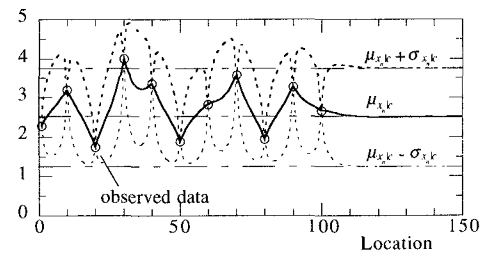
$$\rho_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{(x_i-\mu_i)/\sigma_i\}\{(x_j-\mu_j)/\sigma_j\}\varphi_2(z_i,z_j,\rho'_{ij})dz_i dz_j \tag{4}$$

さらに観測値 x_i および推定を行う点 n と観測点 i 間の相関係数 ρ_{in} $(i=1,\cdots,n-1)$ を変換し、サンプルベクトル $\mathbf{Z}_{n-1}=\{z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\}$ と相関係数ベクトル $\mathbf{S}'_{n-1}=\{\rho'_{n1},\rho'_{n2},\cdots,\rho'_{n(n-1)}\}^T$ を求めると、点 n における z_n の条件付平均 $\mu_{z_n|c}$ と条件付分散 $\sigma_{z_n|c}^2$ は次式により得られる[1]。

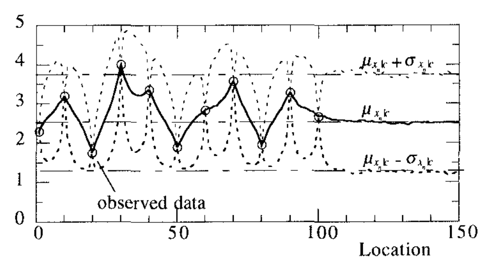
$$\mu_{z_n|c}=\mathbf{Z}_{n-1}^T\mathbf{R}'^{-1}_{n-1}\mathbf{S}'_{n-1},\quad \sigma_{z_n|c}^2=1-\mathbf{S}'^T_{n-1}\mathbf{R}'^{-1}_{n-1}\mathbf{S}'_{n-1} \tag{5}$$

式 (3)、(5) より x_n の条件付確率密度関数が求められる。

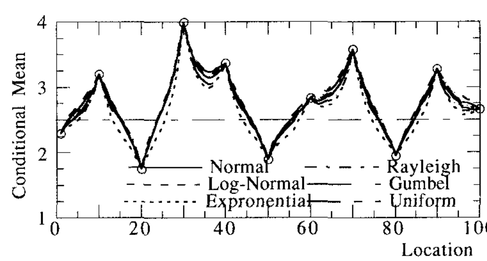
本報告では周辺分布型として正規分布、対数正規分布、指数分布、レーリー分布、グンベル分布および一様分布を与えて定式化した。相関係数の変換は式 (4) を収束計算して行うことができるが、いくつかの分布型に関して Liu & Kiuregian[3] による近似式を用いた。以下に変換式を $\rho'_{ij}=F\cdot\rho_{ij}$ とおき、変換の係



図－1　理論解



図－2　シミュレーション結果（2000サンプル）



図－3　条件付平均の比較

数Fの例を示す。

対数正規： $F = \ln\left(1+\rho_{ij}\delta_i\delta_j\right) \Big/ \left\{\rho_{ij}\sqrt{\ln\left(1+\delta_i^{2}\right)\ln\left(1+\delta_j^{2}\right)}\right\}$ (7)

グンベル： $F = 1.064 - 0.069\rho_{ij} + 0.005\rho_{ij}^{2}$ (8)

ただしδ_iは変数x_iの変動係数であり、対数正規分布は解析解、グンベル分布は近似式である。

条件付確率場の特性はモンテカルロ法に基づいて評価する。サンプル実現値$\underline{z}_n$は正規分布N（$\mu_{z_n|c}, \sigma_{z_n|c}^{2}$）に従う乱数として求められ、式(1)により与えられた確率場におけるサンプル実現値$\underline{x}_n$に変換できる。さらに文献1)で示した漸次拡張方式を適用して推定を繰り返し、複数の未観測点からなるサンプル場が表現できる。そして複数のサンプル場を作成して統計量が求められる。

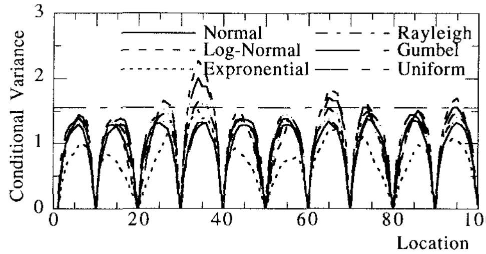
4. 数値計算による検討

a)シミュレーション手法の検証：理論解を解析的に導くことができる対数正規確率場について、シミュレーションによる結果と理論解との比較を行う。簡単のため一次元の均一場を考え、周辺分布の平均を$E[x_i]=2.5$、分散を$Var[x_i]=1.56$（$\delta_i=0.5$）と与えた。また相関係数ρ_{ij}は、

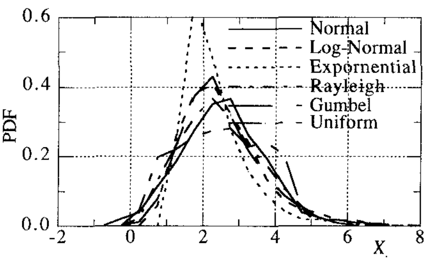
$$\rho_{ij} = \exp\left[-|i-j|/4.0\right] \tag{9}$$

と定義する。さらにサンプル実現値のセットを作成し、観測値として11点に与えた。

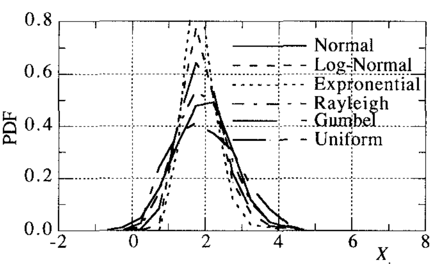
理論解による結果を図－1に条件付シミュレーションによる2000個のサンプル場から平均、標準偏差を求めた結果を図－2に示す。図中で○印が事前に与えた観測値であり、実線は条件付平均値、破線は（条件付平均値±条件付標準偏差）を表す。理論値とシミュレーションによる結果はほぼ一致している。正規場への変換の精度が保証されている限りにおいて、任意の非正規分布に従う条件付確率場について本シミュレーションの適用性が確認された。



図－4　条件付分散の比較



図－5　i=15におけるサンプルの分布



図－6　i=19におけるサンプルの分布

b) 任意分布に従う確率場のシミュレーション結果の比較：次に3.で示した6種類の確率場について周辺分布の平均、分散と観測点および観測値は前項と同じ条件としてシミュレーションを行う。各分布について得られた条件付平均を図－3に、条件付分散を図－4に示す。条件付平均についてはどの分布もほぼ一致している。一方、条件付分散は分布型により差が生じており、全体的に対数正規分布の場合が大きく指数分布の場合が小さい。

次に空間位置がi=15と19の点についてサンプル値x_iの分布を求める。図－5はi=15における結果である。この点は観測点の中間点で観測値の影響が小さく、得られた分布は周辺分布の確率密度関数とほぼ一致している。図－6は周辺分布の平均値よりも小さな観測値を持つ観測点(i=20)の隣の点i=19における結果である。どの分布型についても観測値に引きずられるため図－5に比べると確率密度関数の形がXの値の小さい方に変形している。また分布のピーク付近や裾野の位置における分布型ごとの結果の差が大きくなっている。

5. おわりに

条件付確率場の推定理論は多くの研究が進められ様々な知見が得られているが、多くの理論は正規確率場に限られている。本報告では、任意の非正規分布に従う確率場に関して情報量をもとに条件付確率場の推定を行うシミュレーション手法を提案し、数値計算により提案する手法の検証を行った。さらに未観測点におけるサンプル実現値の確率分布が周辺分布の分布型により差を生じる結果を表し、その有効性を示した。

参考文献

1) 星谷：条件付確率場のシミュレーション理論, 土木学会論文集, No.459 / I-22, pp.113～118, 1993.
2) 野田・星谷：条件付対数正規確率場の同定, 第9回日本地震工学シンポジウム, pp.247～252, 1994.
3) Liu.,P.L., and A.D.Kiureghian : Multibariate Distribution Models with Prescribed Marginals and Covariances, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.1, No.2, 1986.