土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

# Ⅰ-A 466　制約式交換に伴う行列内容

群馬高専　正員　平田恭久

## １．まえがき

著者が開発した等式制約法はシンプレックス法に準じたタブローで活性制約式$g_m$とその従属変数$x_m$を選択することを基本にしている。$g_m$の$x_m$に関する微分である$\nabla_m g_m$はタブローの構成要素の基本になっており、$\nabla_m g_m$は$g_m$と$x_m$の選び方により変化する。活性制約式と従属変数の各々について取り換えを行った場合にどのようになるかが制約式交換と変数交換である。縮小勾配$\nabla_s L$は$x_m$の選び方により異なった値となるため、独立変数$x_s$と$x_m$との変数区分を固定する手段として、以前に変数交換を取り上げたことがある。ここでは制約式交換に伴うタブロー操作によりタブローの各行列が変換されていく過程を調べ、この結果を最適解の探索に利用できないかを考えてみる。

## ２．制約式交換

活性制約面上を探索している途中で新たな制約式に抵触すると、活性制約面が異なったものになるが、探索ではこのようなケースはしばしば生ずる。最適解は乗っている活性制約面に応じて定まってくるので、活性制約面が異なれば最適解も変化する。探索過程での情報を蓄積して利用する準*Newton*法，共役方向法で探索する場合に、活性制約面が探索途中で異なってくると、最適解が変化するため取扱いが非常に難しくなる。この点を解明するには活性制約式を取り換えた場合、すなわち制約式交換によるタブローの各構成要素の変化を調べてみる必要がある。ここではタブローの各行列について制約式交換に伴う内容の変化を調べ、制約式交換の基本式について成立の確認を行う。

$$
\left.
\begin{aligned}
&D = (-\nabla_m g_m{}^T)^{-1}\\
&\triangle x_m{}^T = g_m{}^T D\\
&\lambda_m = D \cdot \nabla_m f\\
&B = -D \cdot \nabla_m g_{r-m}{}^T\\
&E = \nabla_s g_m{}^T D\\
&C = -\nabla_s g_{r-m}{}^T - E \cdot \nabla_m g_{r-m}{}^T\\
&-g_{(r-m)}{}^T = -g_{r-m}{}^T + g_m{}^T B\\
&\triangle f_m = \triangle x_m{}^T \nabla_m f\\
&\nabla_s L = \nabla_s f + E \cdot \nabla_m f
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

## ３．タブローの仕組み

図－１はタブローでの通常の掃き出しであり、その内容を式(1)に示す。図－２は制約式交換の掃き出しであり、その内容は式(1)と同じ形である。ｎ個の変数はｍ個の従属変数$x_m$とｓ個の独立変数$x_s$に分かれ、ｒ個の制約式のうちｍ個は活性制約式$g_m$になる。制約式交換は$g_m$のｍ個の制約式のうちｐ個を交換するもので、そのｐ個は活性制約式でないｒ－ｍ個の$g_{r-m}$から選ばれる。交換されない制約式はｑ個でｑ＋ｐ＝ｍであり、ここでは式表現を簡単にするためｒ－ｍ＝ｐ＜ｍとしている。行列Ｂ，Ｄはｑ部分とｐ部分に分かれ、*Lagrange*乗数$\lambda_{mp} = D_p \cdot \nabla_m f$のように書き表される。$\nabla_m f$は目的関数$f$の$x_m$について微分であり、$x_s$については$\nabla_s f$になる。$\nabla_s L$は縮小勾配であり、式(1)に示すように活性制約式の勾配と変数区分に依存している。$\triangle x_m$は掃き出しに伴う$x_m$の変化であり、タブローの掃き出しだけでは$x_s$は変化しない。$I_{mq}$はｑ×ｑ，$I_{mp}$はｐ×ｐ，$I_s$はｓ×ｓの

| | $f$ | $g_{mq}$ | $g_{mp}$ | $g_{r-m}$ | $x_m$ | $x_s$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $f+\triangle f_m$ | $0_{mq}{}^T$ | $0_{mp}{}^T$ | $-g_{(r-m)}{}^T$ | $\triangle x_m{}^T$ | $0_s{}^T$ | |
| $x_{mq}$ | $\lambda_{mq}$ | $I_{mq}$ | $\varnothing_{qp}$ | $B_q$ | $D_q$ | $\varnothing_{qs}$ | q |
| $x_{mp}$ | $\lambda_{mp}$ | $\varnothing_{pq}$ | $I_{mp}$ | $B_p$ | $D_p$ | $\varnothing_{ps}$ | p |
| $x_s$ | $\nabla_s L$ | $\varnothing_{sq}$ | $\varnothing_{sp}$ | $C$ | $E$ | $I_s$ | s |
| | | m | | r-m=p | m | s | |

図－１　通常の掃き出し

| | $f$ | $g_{mq}$ | $g_{mp}$ | $g_{r-m}$ | $x_m$ | $x_s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $f+\triangle f_m$ $+\triangle f_m'$ | $0_{mq}{}^T$ | $-g_{(r-m)}'{}^T$ | $0_{mp}{}^T$ | $\triangle x_m{}^T$ $+\triangle x_m'{}^T$ | $0_s{}^T$ |
| $x_{mq}$ | $\lambda_{mq}'$ | $I_{mq}$ | $B_q'$ | $\varnothing_{qp}$ | $D_q'$ | $\varnothing_{qs}$ |
| $x_{mp}$ | $\lambda_{mp}'$ | $\varnothing_{pq}$ | $B_p'$ | $I_{mp}$ | $D_p'$ | $\varnothing_{ps}$ |
| $x_s$ | $\nabla_s L'$ | $\varnothing_{sq}$ | $C'$ | $\varnothing_{sp}$ | $E'$ | $I_s$ |

図－２　制約式交換の掃き出し（ｒ－ｍ＝ｐ＜ｍ）

単位行列であり、$\varnothing_{qs}$はq×sの$\varnothing$要素の行列である。

## ４．互換性に基づく式

図−１の$B_p$が図−２の$I_{mp}$になることは$B_p$が制約式交換の掃き出しでの軸要素であることを示す。同様に図−２について制約式交換の掃き出しを行うと、図−２の$B_p'$が図−１の$I_{mp}$になる。このように図−１と図−２では制約式交換での互換性が存在している。この互換性に基づく式を式(2)〜式(5)に示すが、式(2)はタブローの$\mathbf{x}_{mp}$行，式(3)は$\mathbf{x}_{mq}$行，式(4)は$\mathbf{x}_s$行，式(5)は$\mathbf{g}$行に関するものである。式(2)〜式(5)はタブローでの掃き出し操作をそのまま記述したものであり、二つのタブローの間ではこれらの関係が成立していることは明らかである。掃き出しでの軸要素となる$B_p$と$B_p'$はp×p行列であり、お互いに逆行列の関係にある。

$$\left.\begin{aligned}
&B_p\cdot B_p'=I_{mp}\\
&B_p'\cdot B_p=I_{mp}\\
&B_p'\cdot D_p=D_p'\\
&B_p\cdot D_p'=D_p\\
&B_p'\cdot \lambda_{mp}=\lambda_{mp}'\\
&B_p\cdot \lambda_{mp}'=\lambda_{mp}
\end{aligned}\right\}(2)
\qquad
\left.\begin{aligned}
&D_q-B_q\cdot B_p'\cdot D_p=D_q'\\
&D_q'-B_q'\cdot B_p\cdot D_p'=D_q\\
&\lambda_{mq}-B_q\cdot \lambda_{mp}'=\lambda_{mq}'\\
&\lambda_{mq}'-B_q'\cdot \lambda_{mp}=\lambda_{mq}\\
&\varnothing_{qp}-B_q\cdot B_p'=B_q'\\
&\varnothing_{qp}-B_q'\cdot B_p=B_q
\end{aligned}\right\}(3)
\qquad
\left.\begin{aligned}
&E-C\cdot D_p'=E'\\
&E'-C'\cdot D_p=E\\
&\varnothing_{sp}-C\cdot B_p'=C'\\
&\varnothing_{sp}-C'\cdot B_p=C\\
&\nabla_s L-C\cdot \lambda_{mp}'=\nabla_s L'\\
&\nabla_s L'-C'\cdot \lambda_{mp}=\nabla_s L
\end{aligned}\right\}(4)$$

## ５．行列内容の変換

上記４．で述べた互換性に基づく式はタブロー操作による行列内容の変換を表している。行列内容の変換を明らかにしていくときに登場する式として式(6)，(7)がある。これらは互換性に基づく式から直接導かれるもので、”′”の位置を交換した式(6)，(7)と対称の式も存在する。式(6)，(7)の行列内容を調べることによっても式成立の確認が可能であり、例えば式(8)を用いて式(6)の成立が確認できる。式(1)で示すようにDは$-\nabla_m\mathbf{g}_m{}^T$の逆行列なので、式(6)では$\nabla_m\mathbf{g}^T$に関する逆行列を調べることになる。例えば式(8)は逆行列を表す式であり、$a_{ik}$は行列Aのik成分で、$A_{jk}$は行列式｜A｜における$a_{jk}$の余因子である。

$$\left.\begin{aligned}
&\triangle\mathbf{x}_m{}^T-\cdot-\mathbf{g}_{(r-m)}{}^T D_p'=\triangle\mathbf{x}_m+\triangle\mathbf{x}_m'{}^T\\
&\triangle\mathbf{x}_m{}^T+\triangle\mathbf{x}_m'{}^T-\cdot-\mathbf{g}_{(r-m)}'{}^T D_p=\triangle\mathbf{x}_m{}^T\\
&\mathbb{O}_{mp}{}^T-\cdot-\mathbf{g}_{(r-m)}{}^T B_p'=-\mathbf{g}_{(r-m)}'{}^T\\
&\mathbb{O}_{mp}{}^T-\cdot-\mathbf{g}_{(r-m)}'{}^T B_p=-\mathbf{g}_{(r-m)}{}^T
\end{aligned}\right\}(5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&-D_q\cdot\nabla_m\mathbf{g}_{r-m}'{}^T=\varnothing_{qp}\\
&-D_p\cdot\nabla_m\mathbf{g}_{r-m}'{}^T=I_{mp}
\end{aligned}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&D_q(I_m+\nabla_m\mathbf{g}_{r-m}{}^T D_p')=D_q'\\
&D_p(I_m+\nabla_m\mathbf{g}_{r-m}{}^T D_p')=\varnothing_{pq}
\end{aligned}\right\}(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma a_{ik}\cdot A_{jk}=|A|\,\delta_{ij}\\
&\delta_{ij}=1,\ i=j,\ \delta_{ij}=0,\ i\neq j
\end{aligned}\right\}(8)$$

式(4)での基本的な関係であるE→E′を追っていくと式(6)になり、制約式交換により、EがE′になることが確認できる。E→E′の関係から縮小勾配についての$\nabla_s L\to\nabla_s L'$が導ける。同様にして*Lagrange*乗数については式(2)で$\lambda_{mp}\to\lambda_{mp}'$，式(3)で$\lambda_{mq}\to\lambda_{mq}'$を，活性でない制約式については式(5)で$-\mathbf{g}_{(r-m)}{}^T\to-\mathbf{g}_{(r-m)}'{}^T$を追っていくことができる。このようにして行列内容（ベクトルを含む）の変換を式の上で調べていくことができる。等式制約法での探索過程で主要な指標は$\lambda_m$の符号と$\nabla_s L$の大きさであるが、上記の方法を発展させると活性制約式が異なった場合を式の上で検討することが可能になる。

$$\left.\begin{aligned}
&E-C\cdot D_p'=\\
&\nabla_s\mathbf{g}_m{}^T D(I_m+\nabla_m\mathbf{g}_{r-m}{}^T D_p')+\nabla_s\mathbf{g}_{r-m}{}^T D_p'\\
&\text{右辺に式(7)を適用すると}\\
&(\nabla_s\mathbf{g}_m{}^T)_q\cdot D_q'+\nabla_s\mathbf{g}_{r-m}{}^T D_p'\ \text{であるが}\\
&\left.\begin{aligned}&(\nabla_s\mathbf{g}_m{}^T)_q=(\nabla_s\mathbf{g}_m'{}^T)_q\\&\nabla_s\mathbf{g}_{r-m}{}^T=(\nabla_s\mathbf{g}_m'{}^T)_p\end{aligned}\right\}\text{なので}\\
&\text{右辺}=\nabla_s\mathbf{g}_m'{}^T D'=E'
\end{aligned}\right\}(9)$$

## ６．まとめ

制約式についてタブローの仕組み、互換性に基づく式、行列内容などを述べてきたが、ここで示した方法により探索途中で制約面が異なった場合の縮小勾配の変化や*Lagrange*乗数の符号を式の上で検討することが可能である。この方法を発展させることにより制約面が異なった場合の最適解の変化を考える手段となる。