

I-A 219

非定常空気力の有理関数近似の応用について

NKK・基盤技術研究所 正会員 藤澤 伸光

まえがき 最近、非定常空気力を有理関数近似する方法が提案されており¹⁾、フラッタのアクティブ制御などの研究に利用されている。本報告では、フラッタ方程式を制御論的視点から考察し、近似空気力を用いてフラッタ現象を定係数常微分方程式で表現すれば、現象発現への各空気力の寄与率など、フラッタ・メカニズムの考察に極めて有用な知見が得られることを明らかにする。

空気力と構造のモデル 本研究では、空気力として平板に作用する非定常空気力の理論値を用い、フラッタ解析に必要な無次元振動数の範囲で、文献1)に倣って次式で近似した。

$$\begin{bmatrix} \text{Lift}/\rho U^2 b \\ \text{Moment}/\rho U^2 b^2 \end{bmatrix} = \frac{b}{U} \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_0 \begin{bmatrix} \eta \\ \alpha \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n \mathbf{D}_j x_j \quad \frac{b}{U} \dot{x}_j = -\lambda_j x_j + \mathbf{E}_j \begin{bmatrix} \eta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 b は半弦長、 η は b で無次元化したたわみ変位、 α はねじれ変位、 x_j は補助変数であり、 $\mathbf{B}_0$ 、 $\mathbf{B}_1$ 、 $\mathbf{D}_j$ 、 $\mathbf{E}_j$ 、 λ_j は実定数である。構造に関しては、橋桁の部分模型の規模を想定して、表1の値を仮定した。

運動方程式 $n=2$ として、(1)式をたわみとねじれの2自由度の運動方程式の右辺に代入し、ラプラス変換を施すと、最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} M_{11}(S)X + A_{11}(S)X + A_{12}(S)Y + A_{13}Z_1 + A_{14}Z_2 &= 0 & H_{11}X + H_{12}Y + H_{13}(S)Z_1 &= 0 \\ A_{21}(S)X + M_{22}(S)Y + A_{22}(S)Y + A_{23}Z_1 + A_{24}Z_2 &= 0 & H_{21}X + H_{22}Y + H_{23}(S)Z_2 &= 0 \\ X = \mathcal{L}(\eta) \quad Y = \mathcal{L}(\alpha) \quad Z_j = \mathcal{L}(x_j) \quad M_{11} = S^2 + 2h_\eta \omega_\eta S + \omega_\eta^2 \quad M_{22} = S^2 + 2h_\alpha \omega_\alpha S + \omega_\alpha^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$A_{jk} = -\mu_j(U/b)\{B_{1(j,k)}S + (U/b)B_{0(j,k)}\}$ $A_{j(k+2)} = -\mu_j(U/b)^2 D_{k(j)}$ $H_{jk} = -(U/b)E_j(k)$ $H_{j3} = S + (U/b)\lambda_j$ ($j=1,2$)
ただし、 $\mu_1 = \rho b^2/m$ 、 $\mu_2 = \rho b^4/I$ である。これを、ブロック図に展開し、若干、変形すると、空力特性の考察に便利な図1が得られる。図の上辺の小閉ループは、作用モーメント M とねじれ変位 α の関係を示す伝達関数で、このループが不安定になれば、ねじれフラッタが生じる。同様に下辺は、たわみの安定性を表す。これらの小ループが安定であるにも拘わらず、 $M \rightarrow \alpha \rightarrow L \rightarrow \eta$ と回る全体ループが不安定となる現象が連成フラッタである。なお、枠内の伝達関数の具体的な形は次のようになる。 $G_{11} = 1/(M_{11} + A_{11})$ $G_{22} = 1/(M_{22} + A_{22})$

$$g_{11} = A_{13}H_{11}/H_{13} + A_{14}H_{21}/H_{23}$$

$$g_{22} = A_{23}H_{12}/H_{13} + A_{24}H_{22}/H_{23}$$

$$G_{12} = -A_{12} + A_{13}H_{12}/H_{13} + A_{14}H_{22}/H_{23} \quad G_{21} = -A_{12} + A_{13}H_{12}/H_{13} + A_{14}H_{22}/H_{23}$$

図1はフラッタの説明に古くから用いられているが、具体的に伝達関数の形を決定できることが近似空気力利用の利点と言える。

ねじれループの安定性 図1の上辺の、ねじれに関するループの安定性を調べる。古典的制御理論によれば、一巡伝達関数 $-G_{22}g_{22}$ のベクトル軌跡によって、この系の安定性が判定される。すなわち、一巡伝達関数の全ての極が複素平面の左半面にある時（本研究で扱ったケースは、この仮定を満足）、 S を $-\infty i$ から ∞i まで変化させて一巡伝達関数の複素面上の軌跡を求めれば、点 $(-1, 0i)$ から軌跡に引いたベクトルの回転数 N が、

不安定な根の数を与える。プロットした結果を図2に示す。ただし、実係数の場合、軌跡は実軸に関して対象となるから、0 から ∞i までの半分だけを示した。図から風速 $U=22\text{m/s}$ の場合、 $(-1, 0i)$ からのベクトルは回転しないが、風速 24m/s の場合は、半回転するから、1個だけ不安定な根がある。振動解は共役根となるから、この不安定根はフラッタでなく、静的不安定、すなわちダイバージェンスと考えられる。モーメント勾配と、ねじり剛性から計算したダイバージェンス風速は 23.4m/s であり、両者はよく一致している。

表1 構造諸元想定値

質量	1 kgf・s ² /m/m
極慣性モーメント	0.03 kgf・m・s ² /m
弦長	0.6 m
たわみ振動数	2.5 Hz
ねじれ振動数	4.0 Hz
たわみ減衰比	0.02/2 π
ねじれ減衰比	同上

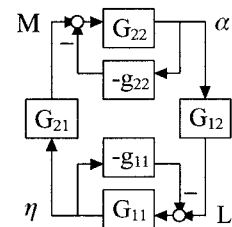


図1 フラッタのブロック図

全体ループの安定性 同様に、全体ループに関する一巡伝達関数の軌跡を求めた結果を、図3に示す。風速16m/sでは、(-1,0i)は軌跡の外にありベクトルは回転しないが、18m/sでは回転する。図3の場合は、半分の軌跡で1回転するから不安定な根は2個あり、振動解（フラッタ）に対応する。なお、従来法で求めたフラッタ発振風速は約18m/sであり、本解析の結果は若干低い値を与えるようであるが、これは空気力近似の誤差によるものである。

フラッタメカニズムに関する考察 図3から、風速増加による伝達関数の絶対値の増加によって、軌跡が実軸を切る点が-1より小さくなる点がフラッタの限界を与えることが分かる。換言すれば、位相角が 180° となる振動数で、利得（絶対値）が1(0db)を越えると不安定になる。従って、軌跡の代わりに利得と位相角を用いても安定判別ができる。図4は、5、10、15、20m/sの4風速における全体ループの一巡伝達関数の利得と位相角を示したもので、図中の●は各風速で位相角が 180° となる点を示している。風速の増加とともに利得も増加し、20m/sでは0dbを越えていることが分かる。一巡伝達関数の利得は、図1の各辺にある伝達関数の利得の積であり、利得をdbで表す場合は和となる。図5に、各辺の伝達関数を示す。●は一巡伝達関数の位相角が 180° の点である。図から、ねじれ特性を表す $M \rightarrow \alpha$ 伝達関数では、空力減衰によるピークの鈍化により、風速の増加とともに利得が現象している。 $L \rightarrow \eta$ 伝達関数でもピークの鈍化は生じているが、問題となる振動数がピークの裾にあるため、利得の増加が見られる。振動数比の増加による連成フラッタの安定化は、図中の●が右に移動することに対応することになる。図5から、風速増加に伴う利得の増加が最も著しいのは、 $\alpha \rightarrow L$ 伝達関数であり、揚力勾配の小さい断面が連成フラッタに対して有利であることを示唆するものと考えられる。

今後の課題 (1)式中の係数決定プロセスは、非線形であって初期値に敏感であり、空気力の近似度は同程度であっても、軌跡が異なる解が得られる場合もある。実測空気力などへの適用を考える場合には、この問題を解決しておく必要があると思われる。

参考文献 1) 増川他、「橋桁に作用する非定常空気力の有限次数近似モデル」、土木学会第49回年講。

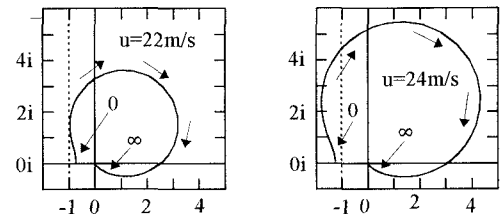


図2 ねじれループの根軌跡

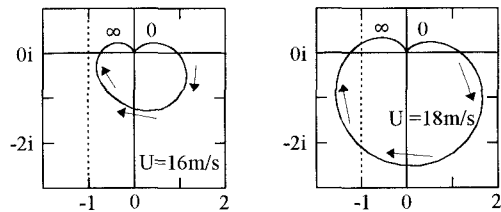


図3 全体ループの根軌跡

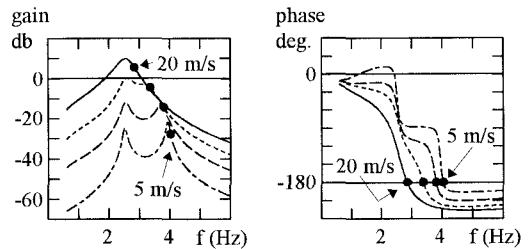


図4 利得と位相角

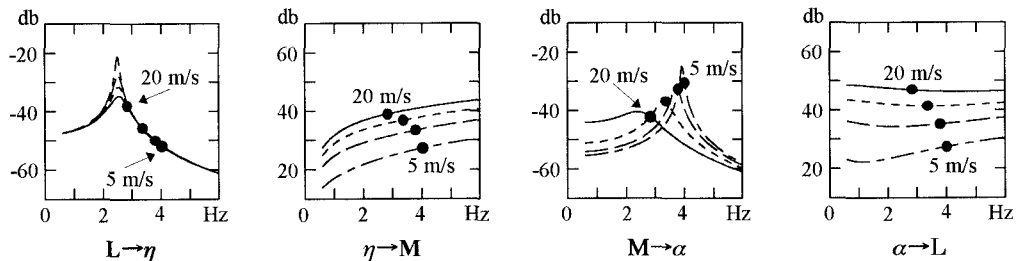


図5 各伝達関数の利得