土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I－A 169　非圧縮粘性流れの同次補間を用いた陰的有限要素法の検討

中央大学　学生会員　丸岡　晃　　中央大学　学生会員　矢田嘉毅
中央大学　学生会員　太田真二　　中央大学　正会員　川原睦人

1. はじめに

有限要素法により非圧縮粘性流れを解析するとき、2つの問題点がある。1つ目の問題点は移流項の取扱いであるが、これには上流側の節点に重みを付ける PG(Petrov–Galerkin) 法の1つである SUPG(streamline–upwind/Petrov–Galerkin) 法や、時間に関するテイラー展開の2次の項を考慮する方法として、BTD(balancing tensor diffusivity) 法があげられる。一般に SUPG 法では陰的解法が採られ、BTD 法は本来導かれるものは陽的であるが、安定性を向上させるため、人工粘性項と粘性項を陰的に表すことによって陰的解法として取り扱われている (改良 BTD(IBTD) 法)。もう1つの問題点は非圧縮条件をどう満足させるかということにある。これには混合補間を用いる方法が従来から使われてきたが、近年、安定化有限要素法と呼ばれるものが提案され、同次補間による解析が可能になった。この方法は PG 法の一般化であり、圧力振動を移流項の SUPG 法と同じ原理で安定化させることが可能になる。この圧力を安定化させる PG 法による付加項を PSPG(pressure–stabilizing/Petrov–Galerkin) 項と呼ぶ。また、FS(fractional step) 法も同次補間を用いることが可能で、これは圧力 Poisson 方程式を導くことによって、流速と圧力を分離して解く手法である。

ここでは、はじめに陰的解法により時間離散化された非圧縮粘性流れの基礎方程式を安定化有限要素法の1つである SUPG+PSPG 法により離散化し、ここに含まれる2つのパラメーターを選ぶことによって、IBTD 法, FS 法も導けることを示す。これらを組み合わせた4種類の離散化手法をとりあげ、Standing Vortex Problem と呼ばれる Benchmark 問題により各手法の性質、適用性、有効性について検討した。

2. 離散化手法

非圧縮粘性流れの運動方程式を時間方向に Crank–Nicolson 法により離散化し、また、非圧縮の連続式を陰的に表す。

$$\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^{n}}{\Delta t}+\boldsymbol{u}^{n}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^{n+1/2}+\nabla p^{n+1/2}-\nu\nabla^2\boldsymbol{u}^{n+1/2}=\boldsymbol{f} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1}=0 \tag{2}$$

ここで、$\boldsymbol{u}^{n+1/2}=(\boldsymbol{u}^{n}+\boldsymbol{u}^{n+1})/2$ であり、移流項の非線形項の取扱いは、移流速度を既知の流速により近似する。

空間方向の離散化には、同次補間を用いることが可能な安定化有限要素法の1つである SUPG+PSPG 法を用いる。流速と圧力の重み関数と試行関数の Q1Q1 要素や P1P1 要素の補間による近似関数を$\boldsymbol{w}_h$, q_h, $\boldsymbol{u}_h$, p_hとすると、SUPG+PSPG 法の重み付き残差方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\boldsymbol{w}_h\cdot\{\frac{\boldsymbol{u}_h^{n+1}-\boldsymbol{u}_h^{n}}{\Delta t}+\boldsymbol{u}_h^{n}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_h^{n+1/2}-\boldsymbol{f}_h\}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\nabla\boldsymbol{w}_h\cdot\{-p_h^{n+1/2}\boldsymbol{I}+\nu\nabla\boldsymbol{u}_h^{n+1/2}\}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}q_h\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h^{n+1}\mathrm{d}\Omega\\&+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega_e}(\tau_m\boldsymbol{u}_h^{n}\cdot\nabla\boldsymbol{w}_h+\tau_c\nabla q_h)\cdot\{\frac{\boldsymbol{u}_h^{n+1}-\boldsymbol{u}_h^{n}}{\Delta t}+\boldsymbol{u}_h^{n}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_h^{n+1/2}+\nabla p_h^{n+1/2}-\boldsymbol{f}_h\}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{w}_h\cdot\hat{\boldsymbol{t}}_h\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{3}$$

ここで、τ_m, τ_cは要素ごとに定義される値である。第4項は安定化項と呼び、τ_m, τ_cの乗されている項は移流項と連続式の Galerkin 法の離散化による不安定性を安定化する働きがあり、SUPG 項, PSPG 項と呼ばれている。式 (3) から得られる代数方程式は流速と圧力を連立して解くことになるが、ここでは連続式に含まれる未知の流速を近似して連続式から圧力を求め、その圧力を用いて運動方程式から流速を求める計算を繰り返すことにより解を得る方法を用いる。このとき連続式の代数方程式の行列の形は対称となり、運動方程式の代数方程式の行列の形はは非対称となる。τ_mとτ_cは以下のような共通の値を用いる。

$$\tau_m=\tau_c=\left(\left(\frac{2\|\boldsymbol{u}_h\|}{h}\right)^2+\left(\frac{4\nu}{h^2}\right)^2\right)^{-1/2} \tag{4}$$

安定化項に含まれる時間微分項を部分積分し、τ_m, τ_cを$\tau_m=\Delta t/2$, $\tau_c=\Delta t$ と置くと、第1項の移流項と第3項の発散項の陰的部分が消去できる。このとき運動方程式の離散式は BTD 法の人工粘性項と粘性項を Crank–Nicolson 法により離散化した手法 (改良 BTD(IBTD) 法) による離散式に一致し、連続式は FS 法で用いる圧力 Poisson 方程式による離散式に一致する。ここではこの手法を IBTD+FS 法と呼ぶことにする。この場合も、連続式の離散式に安定化項に流速の陰的部分が含まれるため、流速と圧力を連立して解くことになるが、連続式の中で最も卓越する発散項が消去されているため、ここでは、連続式の安定化項の流速の陰的部分を陽的に近似することで圧力を求め、その圧力を用いて運動方程式から流速を求める方法を用い、繰り返し計算を行わない。この場合、運動方程式と連続式のそれぞれの代数方程式の行列の形は対称となる。

SUPG+PSPG 法では、以下のような重み関数を運動方程式に適用していることになる。

$$w_h' = w_h + \tau_m u_h^n \cdot \nabla w_h + \tau_c \nabla q_h \quad (5)$$

運動方程式の離散化は、τ_mを式 (4) とすることで SUPG 法となり、$\tau_m = \Delta t/2$ とすることで IBTD 法となる。また、連続式の離散化は、τ_cを式 (4) とすることで PSPG 法となり、$\tau_c = \Delta t$ とすることで、FS 法となる。これらを組み合わせると表 (1) のような４種類の手法が得られる。

表 (1): 各離散化手法の比較

離散化手法	運動方程式		連続式		繰り返し数
	τ_m	行列	τ_c	行列	
SUPG+PSPG	式 (4)	非対称	式 (4)	対称	m
IBTD+FS	$\Delta t/2$	対称	Δt	対称	1
SUPG+FS	式 (4)	非対称	Δt	対称	1
IBTD+PSPG	$\Delta t/2$	対称	式 (4)	対称	m

3. Standing Vortex Problem

この問題の目的は、計算手法がどの程度の数値的な散逸誤差をもつかを調べる問題である。1×1 の領域で非粘性流れを仮定する。初期条件として人工的な渦を発生させ、計算を進める。厳密解は初期条件そのものであるが、安定な計算ならからららず解は減衰する。初期の渦がどの程度の減衰をしたかを調べることによって数値的な散逸誤差を評価する。

初期条件は、$u_r = 0$, $u_\theta = \{5r \text{ for } r < 0.2,\ 2 - 5r \text{ for } 0.2 < r < 0.4, 0 \text{ for } r > 0.4\}$ である。要素分割は 20×20 の Q1Q1 要素を用いる。ピークのクーラン数 c を $c = 0.1,\ 0.5,\ 1.0,\ 2.0$ となるように、Δt を設定し、それぞれ$\Delta t = 0.005,\ 0.025,\ 0.05,\ 0.1$ である。計算回数は$t = 3$ になるまで行っている。各手法の $t = 3$ の運動エネルギーの相対変化を表 (2) に示す。PSPG 法の繰り返し計算数 m は $m = 10$ としている。SUPG+PSPG 法, IBTD+FS 法, IBTD+PSPG 法は全てのクーラン数で安定な計算ができ、解の減衰が少ない。ところが SUPG+FS 法は$c = 2.0$ 以外では不安定となった。SUPG+PSPG 法は解の減衰はクーラン数に依存しにくいが、IBTD+FS 法ではクーラン数に依存する。IBTD+PSPG 法は IBTD+FS 法より、解の減衰はクーラン数に依存しにくい。

図 (1) に $t = 3$ の渦度分布を示す。右の IBTD+FS(b) は IBTD 法の安定化項に含まれる圧力項を無視し、移流項のみを考慮した IBTD+FS 法の結果である。移流項のみを考慮した IBTD+FS 法では減衰が非常に大きい。ここで示すような、移流方程式から得られた人工粘性項のみを非圧縮 Navier–Stokes 方程式に導入する手法は一般に多く行われている。しかし、このような手法では、過剰の散逸誤差を含む危険性があると考えられる。安定化の項は、運動方程式の全ての項を考慮する必要がある。

表 (2): 運動エネルギーの相対変化

クーラン数 c	0.1	0.5	1.0	2.0
SUPG+PSPG	0.924	0.921	0.910	0.867
IBTD+FS	0.987	0.950	0.917	0.870
SUPG+FS	発散	発散	発散	0.871
IBTD+PSPG	0.949	0.941	0.919	0.865

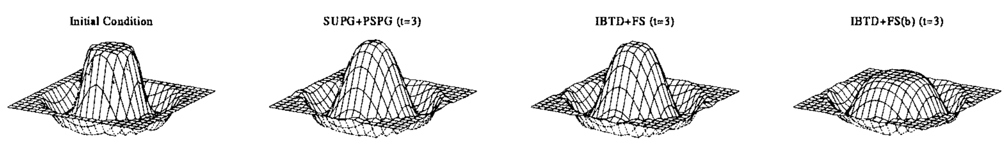

図 (1): 渦度分布 (c=1.0)

4. おわりに

非圧縮粘性流れの解析に陰的解法による有限要素法を適用した。SUPG+PSPG 法の離散化から、対称行列の IBTD 法と圧力 Poisson 方程式を用いる FS 法を導いた。これらを組み合わせることにより４種類の離散化手法が可能でその中で、SUPG+PSPG 法, IBTD+FS 法, IBTD+PSPG 法が安定に計算できることを Benchmark 問題により確認した。これらの中で、SUPG+PSPG 法は解がクーラン数によらず信頼性が高いが、計算効率に優れない。IBTD+FS 法が繰り返し計算が要らず、対称行列なので計算効率に優れている。IBTD+PSPG 法は IBTD+FS 法と SUPG+PSPG 法の中間的な手法である。IBTD+FS 法と IBTS+PSPG 法はどちらも SUPG+PSPG 法の計算効率の問題点を解決する手法であり、安定な手法である。今後、より現実的な問題を行い計算時間の比較や、精度面の比較を行うことによって詳細に各手法を検討していく予定である。

参考文献

[1] T.E. Tezduyer, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih, Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 95 (1992)

[2] M. Hayashi, K. Hatanaka and M. Kawahara, Lagrangian finite element method for free surface Navier–Stokes flow using fractional step methods, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol.13 (1991)