I-A 168　Cavity 内の流れと円柱まわりの流れ解析による離散化手法の比較

中央大学　学生会員　丸岡　晃　　中央大学　学生会員　太田　真二
○ 中央大学　学生会員　矢田　嘉毅　　中央大学　正会員　川原　睦人

1. はじめに

本論文では、有限要素法による非圧縮粘性流れの解析を行う。時間方向の離散化には安定性に優れた陰的解法を適用し、流速と圧力の補間関数には同じ次数のものを選ぶ同次補間を用いて離散化手法の比較・検討を行った。ここで取り上げた手法は、移流項の離散化には上流側の節点に重みを付ける SUPG(Streamline–Upwind/Petrov–Galerkin) 法と、時間に関するテイラー展開の２次の項を考慮し、粘性項を陰的に扱った改良 BTD(IBTD) (Implicit Balancing Tensor Diffusivity) 法である。非圧縮条件を満足させるために、同次補間を用いることのできる手法として、圧力を安定化させる PG 法による付加項を用いる PSPG(pressure–stabilizing/Petrov–Galerkin) 法と、圧力 Poisson 方程式を導くことによって流速と圧力を分離して解く、FS(fractional step) 法がある。これらを組み合わせた SUPG+PSPG 法、IBTD+FS 法、IBTD+PSPG 法の３種類の手法により Cavity 内の流れと円柱まわりの流れ解析を行い、各手法の性質、適用性、有効性について検討した。

2. Cavity 内の流れ

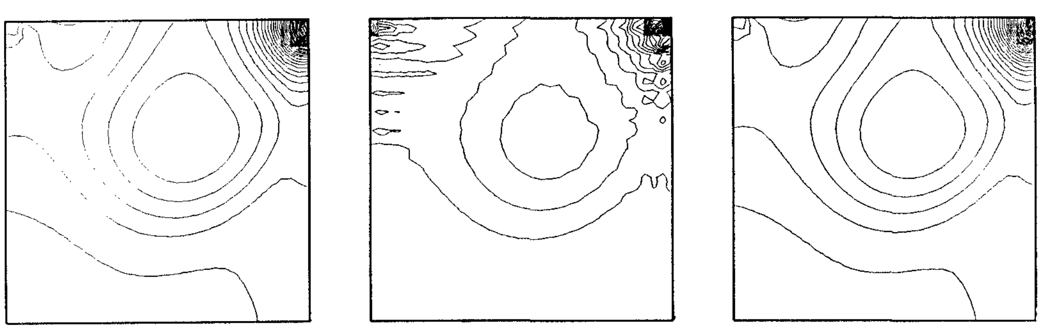
定常解を持つ問題の検証として Cavity 内の流れを取り上げた。Reynolds 数 $Re = 400$ とし、要素分割は 32×32 の Q1Q1 要素を用いる。計算は定常状態に収束するまで行った。$\Delta t = 0.001,\ 0.01$ として計算を行った。表 (3) に各離散化手法の計算結果の比較を示す。図 (2) に $\Delta t = 0.001$ のときの圧力コンター図を示す。

SUPG+PSPG 法では、解は Δt に全く依存しない。これは SUPG+PSPG 法の時間微分項がゼロに収束したとき、Δt に依存する項が、全く存在しなくなるからである。IBTD+FS 法では、解は Δt に大きく依存し、特に Δt が小さいと解の絶対値が大きくなる。$\Delta t = 0.001$ のときの圧力を見ると、圧力解が振動していることがわかる。これは、IBTD 法の運動方程式の安定化の項と FS 法の連続式の安定化の項が Δt に依存するためである。特に、Δt が小さい場合に不安定になりやすい。IBTD+PSPG 法では、解は Δt にほとんど依存していない。この問題では、IBTD 法による Δt の依存性より、FS 法による依存性のほうが、大きく効いている。これは運動方程式には粘性項があり、この問題は $Re = 400$ で比較的 Reynolds 数の低い問題であるため、人工粘性の項が大きく効いてこないからである。

SUPG 法で τ_m を導くときに、定常状態で最適なものを与える形になっているため、SUPG 法のほうが解の信頼性は高い。IBTD 法では特に Δt が小さいとき、実際の Reynolds 数より、高い問題を解いている可能性があり、逆に Δt が大きいとき、実際の Reynolds 数より低い問題を解いている可能性がある。ところが、有限要素分割によっても数値的な粘性効果がはいる可能性があるため、一概に SUPG 法のほうが、実際の物理的な流れに近いものを解いているとは言いきれない。

表 (3): Cavity 内の流れの計算結果の比較

離散化手法	Δt	$\psi_{\min}$	$u_{\min}$	$v_{\min}$	$v_{\max}$
SUPG+PSPG	0.001	−0.0881	−0.242	−0.486	0.216
	0.01	−0.0881	−0.242	−0.486	0.216
IBTD+FS	0.001	−0.0921	−0.255	−0.527	0.230
	0.01	−0.0911	−0.251	−0.513	0.227
IBTD+PSPG	0.001	−0.0880	−0.244	−0.489	0.215
	0.01	−0.0880	−0.244	−0.488	0.215

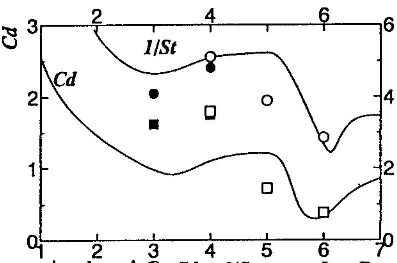


SUPG+PSPG　　IBTD+FS　　IBTD+PSPG

図 (2): 圧力コンター図 ($\Delta t = 0.001$)

3. 円柱まわりの流れ

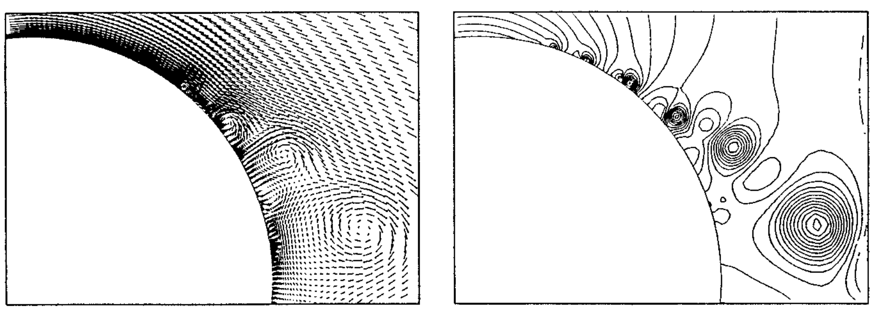
カルマン渦の発生する非定常的な問題として円柱まわりの流れを取り上げた。この問題の実現象をとらえるためには3次元解析が必要であると言われているが、ここでは定性的な面に着目し、2次元解析のみを行った。レイノルズ数 $Re = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ とし、有限要素分割は、2種類のメッシュA、Bを用いる。最小要素幅は円柱の直径 Dに対しメッシュAは$0.001D$、メッシュBは$0.0001D$である。また、周方向にはメッシュAは160分割、メッシュBは320分割している。$\Delta t = 0.01$ として計算を行った。このΔt は、局所的にクーラン数が1を越えるため、陰的解法でなければ計算できない。PSPG 法の繰り返し計算数 m は $m = 3$ とした。メッシュA, BをIBTD+FS 法によって計算した抗力係数 Cd とストローハル数 St の実験値との比較を図(3)に示す。図(3)より、$Re = 10^6$のとき実験値と値が一致しているので、 高 Re 数でも良い結果が得られることが確認できた。また、各離散手法の計算結果の比較を表(4)に示すが、各離散化手法によって値はほとんど変わらなかった。ここで、計算時間はIBTD+FS 法を1としたときの相対的な値である。計算時間をみると、SUPG+PSPG 法はIBTD+FS 法の倍以上の計算を必要とする。IBTD+PSPG 法はIBTD+FS 法とくらべ繰り返し計算を行っているが倍以上は変わらない。SUPG+PSPG 法は最も安定に計算が出来るが、IBTD+FS 法やIBTD+PSPG 法は導かれる代数方程式が対称行列であるため、容量を削減でき、さらに高速に計算することが可能である。図(5)は、メッシュBで $Re = 10^6$のときの、円柱後方での流速ベクトル図と圧力コンター図を示す。メッシュBは要素分割が細かいので、境界付近での剥離渦がはっきりと捕らえられた。また、Re が高いので、渦と渦の間隔が狭くなっているのが分かる。



図(3): 抗力係数とストローハル数

表(4): 円柱まわりの流れの計算結果の比較 ($Re = 10^3$)

離散化手法	Δt	$\overline{Cd}$	St	計算時間
SUPG+PSPG	0.01	1.63	0.245	2.55
IBTD+FS	0.01	1.62	0.245	1.00
IBTD+PSPG	0.01	1.62	0.244	1.37


図(5): 流速ベクトル図と圧力コンター図 ($IBTD + FS, Re = 10^6$)

4. おわりに

非圧縮粘性流れの解析に陰的解法による有限要素法を適用した。3種類の離散化手法の中で、Cavity 内の流れでは、FS 法はΔt を小さくとると、圧力が振動することを示し、PSPG 法はこれを解決する手法であることを示した。円柱まわりの流れでは、クーラン数が1を越えるΔt を採っても計算が可能であることを示し、各手法の特徴を示した。

SUPG 法とIBTD 法を比較すると、前者は与えられた Re より高い Re を解くことはないので信頼性は大きい。しかし、後者は与えられた Re より低い Re を解く可能性があり、また人工粘性が低いと解が振動することがあるので、信頼性が低い。一方、各離散化方法によって Cd 値と St の値が変わらなかったので、安定性を求める場合はSUPG+PSPG 法、計算効率を求める場合はIBTD+FS 法かIBTD+PSPG 法を選ぶ方がよい。

参考文献

[1] T.E. Tezduyer, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih, Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 95 (1992)
[2] M. Hayashi, K. Hatanaka and M. Kawahara, Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol.13 (1991)