I-A 149

任意開き角を有する切り欠き先端近傍の弾塑性解析

松江工業高等専門学校　正会員　浜野　浩幹
山梨大学工学部　正会員　平島　健一
長岡技術科学大学　学生会員　石田　知久

1．緒　言

ひずみ硬化法則に従う切り欠き先端の特異挙動については既に多くの研究者によって解析されてきているが，それらは均一部材や対称性のあるもの等の限定された形の系にしか適用されていない．

本研究では，図1に示すように異種材料の接合界面に任意の開き角の切り欠きを有する一般的な複合材料に対し，図2に示すような折れ線（bilinear）でモデル化される応力－ひずみ関係の弾塑性問題を取り扱う．これらの解は二次元の面内破壊モード，すなわち，モードⅠ，モードⅡに対応するものである．解法は切り欠き両縁での応力自由の境界条件，異種材料接合面での応力，変位の連続条件から12元の特性行列式を求め，これを解いて特異解を求める．なお，異種材料に沿って切り欠きが存在する問題の場合は8元の行列式となる．本法では割線法の一種であるMuller法を用いて特性行列式から直接根を求める方法をとる．

2．基本式

材料の挙動は図2に示すような線形硬化特性を持つと仮定する．このとき構成関係式は$\sigma < \sigma_{0j}$の範囲では

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\alpha}{E_t}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right], \tag{1}$$

$\sigma > \sigma_{0j}$の範囲では

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right] + \frac{3}{2}\frac{1-\alpha}{E_t}S_{ij} \tag{2}$$

で与えられる．ここに，σ_{0j}は図2に示した降伏応力，νはポアソン比，$\alpha = E_t / E$は塑性領域と弾性領域のヤング係数の比であり，S_{ij}は偏差応力を表す．

ここで，切り欠き先端近傍におけるAiryの応力関数を

$$\Phi = r^{r+1}\phi(\theta) \tag{3}$$

と仮定する．ここに

$$\left.\begin{aligned}
&\phi(\theta) = \phi_1(\theta) + \phi_2(\theta),\\
&\phi_1(\theta) = a_1\sin(\lambda+1)\theta + a_2\cos(\lambda+1)\theta,\\
&\phi_2(\theta) = a_3\sin(\lambda-1)\theta + a_4\cos(\lambda-1)\theta
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

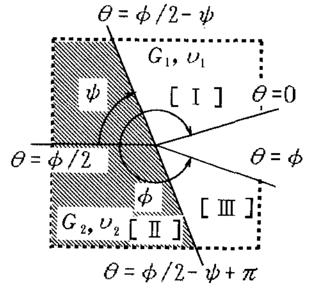

図1．クラックの存在する異種材料結合部材．

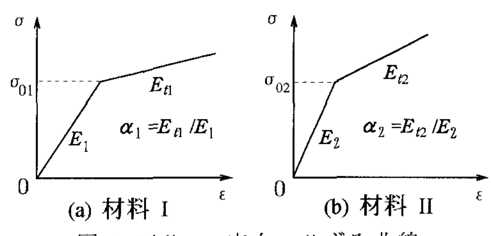

図. 2. Bi-linear 応力－ひずみ曲線.

以上より塑性領域を考慮したひずみ式が次のように得られる．

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= -r^{\lambda-1}\left[\frac{1}{E}\lambda\left[(\lambda+1)(1+\nu)\phi_1 - \{3-\lambda(1+\nu)-\nu(1+4B)\}\phi_2\right] + \frac{1-\alpha}{2E_t}\lambda[3(\lambda+1)\phi_1 - (5-3\lambda-4B)\phi_2]\right],\\
\varepsilon_\theta &= r^{\lambda-1}\left[\frac{1}{E}\lambda\left[(\lambda+1)(1+\nu)\phi_1 + \{\lambda+1+\nu(\lambda-3-4B)\}\phi_2\right] + \frac{1-\alpha}{2E_t}\lambda[3(\lambda+1)\phi_1 + (3\lambda-1-4B)\phi_2]\right],\\
\gamma_{r\theta} &= -r^{\lambda-1}\left[\frac{2}{E}(1+\nu)\lambda\phi' + \frac{3(1-\alpha)}{E_t}\lambda\phi'\right]
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

変位，応力に関する式も弾性学の基礎方程式から次のように導かれる．

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -r^{\lambda}\frac{1}{2G_t}\{(\lambda+1)\phi_1+(\lambda-\kappa_t)\phi_2\}, \\ u_\theta &= -r^{\lambda}\frac{1}{2G_t}\left\{\phi_1'+\frac{\lambda+\kappa_t}{\lambda-1}\phi_2'\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -r^{\lambda-1}\lambda\{(\lambda+1)\phi_1+(\lambda-3)\phi_2\}, \\ \sigma_\theta &= r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)\phi, \\ \tau_{r\theta} &= -r^{\lambda-1}\lambda\phi. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

また，有効応力は平面応力状態のときは

$$\sigma_e = \left[\sigma_r^2+\sigma_\theta^2-\sigma_r\sigma_\theta+3\tau_{r\theta}^2\right]^{1/2}, \tag{8}$$

平面ひずみ状態のときは

$$\sigma_e = \left[(1-\nu_v+\nu_t^2)(\sigma_t+\sigma_\theta)^2+(1-2\nu_t)^2\sigma_r\sigma_\theta+3\tau_{r\theta}^2\right]^{1/2} \tag{9}$$

で与えられる．

これらの式を1で述べた境界条件，連続条件に適用すれば，12 個の未知定数${}_1a_j, {}_2a_j, {}_3a_j\,(j=1,2,3,4)$に関する同次型の12元連立1次方程式が求められ，これらの未知定数が有意な解を持つためには，その係数行列式の値が零となればよいことから12元の特性行列式が得られる．

3．数値計算例

図 3 は異種材接合面の角度を$\psi_1=60°$，ポアソン比を$\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.33$，領域角ϕを 180° から 360° までとし，せん断弾性定数比を$m=G_2/G_1$=1, 2, 5, 10, 20 と変化させた場合の特異解λを求めたものである．図 4 はせん断弾性定数比を$m=1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$とした場合の特異解である．両図とも$\alpha_1=\alpha_2=1$として両部材とも弾性領域の場合のみを計算したものであり，従来までの結果と完全に一致している．両図とも異なる 2 実根が求められている．また，mが小さくなるにつれて特異性が強くなっている．つぎに，異種材接合面の傾き角を$\psi=60°$，ポアソン比を$\nu_1=0.345, \nu_2=0.27$，弾性係数の比を$\alpha_1=0.8, \alpha_2=0.6$として計算した場合を図 5, 6 に示す．図 5 は$m\geq 1.0$，図 6 は$m<1.0$の場合である．特に$m<1.0$の場合は異種材の接合面$\phi=240°$での材質の違いによる影響がよく現れている．

4．結　言

異種材料接合面に任意の開き角の切り欠きが存在する複合材料についてひずみ硬化を考慮した一般式を求め，境界条件等からその特異性を導き，特異解を求めた．

文献：Hutchinson,J.W.,*J.Mech,phys.Solids*,**16**(1968),13-31.Chung, C. and Eischen,J.E.,*Int.J.Solids Structures*,**28**(1991),105-113.

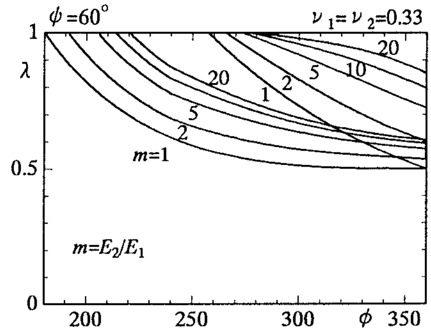

図 3. $\alpha_1=\alpha_2=1.0$ の場合の特異解（$m\geq 1.0$）．

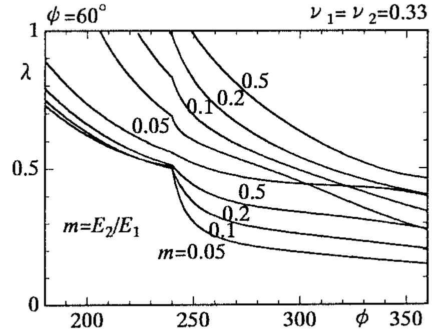

図4. $\alpha_1=\alpha_2=1.0$ の場合の特異解（$m<1.0$）．

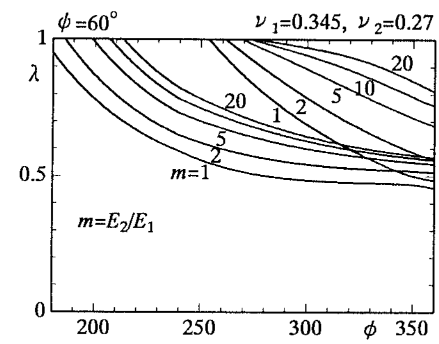

図5. $\alpha_1=0.8$, $\alpha_2=0.6$ の場合の特異解（$m\geq 1.0$）．

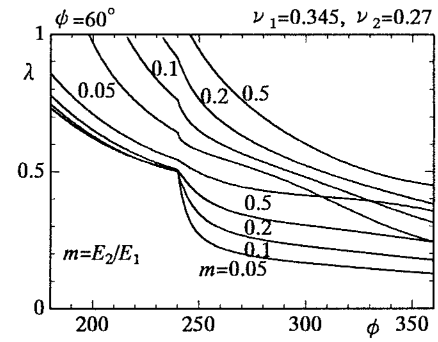

図6. $\alpha_1=0.8$, $\alpha_2=0.6$ の場合の特異解（$m<1.0$）．