I－A 147

群論的変分原理

和歌山高専　環境都市工学科　正会員○　有尾　一郎

1.　はじめに

近年セル構造体のハニカム構造の要素解析法が多孔質材料の強度解析法として提案され，微細構造の力学的挙動が研究されてきている．しかし，現行の要素解析法では座標変換において構造物全体の幾何学的対称性とハニカム・フォームの対称性の間に，軌道の種類や配置・形状によって支配される局所座標変換を行わなければならず，セル構造の変形特性や対称性の多様性および煩雑性から軌道構造に対する有限要素の定式化に課題が残されている．本研究はこれらの課題を解決するにあたり，変分原理に群作用下の仮想変位を用いて直接変分をとり，有限な軌道に対する有限要素法を新たに提案するものである．

2.　群論的変分原理

変位ベクトル u の変分 δu に対するポテンシャルエネルギ U の極小原理

$$\delta U(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}) = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{u}}\delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} K \delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad (1)$$

を考える．ここに，fは外力ベクトル，Kは剛性行列を表す．ポテンシャルエネルギ関数の対称性を記述するにあたり，幾何学的変換を表す元 g からなる群 $\mathcal{G}$ を考える．例えば群 $\mathcal{G}$ の元 g が N 次元ベクトル u に作用すると，u が $g(u)$ に変換されるとする．この変換を座標変換の仕組みを表した表現行列 $T(g)$ で表すと

$$T(g)\boldsymbol{u} = g(\boldsymbol{u}), \quad {}^{\forall}g \in \mathcal{G}$$

となる．ここではfとuは同一の空間に存在すると仮定し，外力ベクトル f の表現行列も同一のものとする．

この系の対称性は，群 $\mathcal{G}$ の元 g が引き起こす座標変換 $T(g)$ に対する，ポテンシャルエネルギ U の不変性(群 $\mathcal{G}$ 不変性)

$$U(T(g)\boldsymbol{f}, T(g)\boldsymbol{u}) = U(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}), \quad {}^{\forall}g \in \mathcal{G}$$

により表される．また，式(1)に対し，$T(g)u$に関して変分をとり，$T(g)^{\mathrm{T}}T(g) = \mathrm{I}$ を用いると，

$$\begin{aligned}
T(g)\delta U(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}) &= \delta U(T(g)\boldsymbol{f}, T(g)\boldsymbol{u}) \\
&= [T(g)\boldsymbol{u}]^{\mathrm{T}} T(g) K T(g)^{\mathrm{T}} \delta\left(T(g)\boldsymbol{u}\right) \\
&\quad -[T(g)\boldsymbol{f}]^{\mathrm{T}} \delta\left(T(g)\boldsymbol{u}\right) \\
&= g(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} K \delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \delta \boldsymbol{u}), \quad {}^{\forall}g \in \mathcal{G}
\end{aligned}$$

釣合方程式の同変条件式が求まる．ここに，式(1) の変数f, u, Kおよび釣合式全体が全て群作用下の座標系 $g(\cdot)$ に置換されたことを意味する．以後，この g作用下の剛性方程式を導びくこととする．

3.　群 $\mathcal{G}$ 作用下の剛性方程式

群 $\mathcal{G}$作用下の剛性方程式は式(2) より

$$\boldsymbol{F}(T(g)\boldsymbol{f}, T(g)\boldsymbol{u}) = \left(\frac{\partial U}{\partial (T(g)\boldsymbol{u})}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \quad (2)$$

と定義する．

群作用下の変位 $T(g)u$ に対する変分から得られる変位ベクトルは既約表現 μ 毎に表現でき，

$$\boldsymbol{u} = H\boldsymbol{w} = \sum_{\mu \in \mathcal{R}(\mathcal{G})} H^{\mu} \boldsymbol{w}^{\mu}$$

と定義する．直接剛性法の有限要素においてひずみベクトル ε および応力ベクトル σ を，座標変換行列 H を用いて

$$H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} = H^{\mathrm{T}} B H H^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} = H^{\mathrm{T}} W \boldsymbol{w}$$

$$H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} = H^{\mathrm{T}} D H^{\mathrm{T}} H \boldsymbol{\varepsilon} = H^{\mathrm{T}} D H H^{\mathrm{T}} W \boldsymbol{w}$$

とそれぞれ変換できる．ここに，Dは弾性構成行列を，Bはひずみベクトルと変位ベクトルの関係を形状関数で表した行列である．微小体積 $\mathrm{d}V$ に対する等価節点外力と応力との関係は

$$\boldsymbol{f} = \int_V B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} \ \mathrm{d}V$$

と成り立つことが知られているから，これを H を用いて式(2)に代入すると軌道要素に対する剛性方程式

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{F}} &= \int_V H^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} H H^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}V - H^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} \\
&= \int_V W^{\mathrm{T}} D W \boldsymbol{w} \, \mathrm{d}V - H^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}
\end{aligned}
$$

が求められる．

4.　軌道に対する剛性行列の組立

群 $\mathcal{G}$ 不変の既約表現 μ に対応する軌道要素の面内板剛性行列は

$$
\widetilde{K}_e^{\mu} = t \iint_{-1}^{1} \tilde{f}^{\mu}(\xi,\eta) \det|J| \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \tag{3}
$$

で表される．ここに，$\tilde{f}^{\mu}(\xi,\eta)$ は μ に対する正規化された剛性分布を表す．

一方，軌道の節点数 n からなる群作用下の変換行列は

$$
W^{\mu} = \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} (H^{\mu}_{p(j)})_x \\ (H^{\mu}_{p(j)})_y \end{array} \right\} \tag{4}
$$

と具体的に書き表せる．$(H^{\mu}_{p(j)})_x$ は軌道の種類 $p \in$ Types の節点 j に対する x 成分の座標変換行列をそれぞれ表す．このときの剛性分布関数は式(4)と弾性構成行列より

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}^{\mu}(\xi,\eta) &= (W^{\mu})^{\mathrm{T}} D \, W^{\mu} \\
&= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{N}^{\mu}_x}{\partial \xi} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \widetilde{N}^{\mu}_x}{\partial \xi} \frac{\partial \widetilde{N}^{\mu}_y}{\partial \eta} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial \widetilde{N}^{\mu}_y}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \widetilde{N}^{\mu}_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \widetilde{N}^{\mu}_y}{\partial \xi} \right)^2 \right]
\end{aligned}
$$

と求められる．

5.　$\mathcal{D}_4$作用下の各剛性行列

例えば，$\mathcal{D}_4$不変 Serendipity 要素の形状関数 N_j を $\mathcal{D}_4$軌道要素の形状関数を用いて各既約表現毎に剛性行列$\widetilde{K}^{\mu}$を求める．正規化された 4 節点の形状関数は

$$
N_j = \frac{1}{4}(1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta), \quad j = 1,\cdots,4
$$

で与えられる．また，$\widetilde{N}^{\mu}$は各既約表現に対応する形状関数の x, y 成分を

$$
\widetilde{N}^{\mu} = \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{N}^{\mu}_x \\ \widetilde{N}^{\mu}_y \end{array} \right\}, \quad {}^{\forall}g \in G
$$

とする．これに対し，対称な仮想変位を新たに定義し，正規座標系の軌道要素に対する 1 次既約表現の形状関数は

$$
\widetilde{N}^{(1,1)_4} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\eta \end{array} \right\}, \quad \widetilde{N}^{(1,2)_4} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-1}{2\sqrt{2}}\eta \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi \end{array} \right\}
$$

$$
\widetilde{N}^{(1,3)_4} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}}\eta \end{array} \right\}, \quad \widetilde{N}^{(1,4)_4} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2\sqrt{2}}\eta \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\xi \end{array} \right\}
$$

であり，2 次既約表現の形状関数は

$$
\widetilde{N}^{(2,1)_4^+} = \left\{ \begin{array}{cc} 1/2 & 0 \\ 0 & \xi\eta/2 \end{array} \right\},
$$

$$
\widetilde{N}^{(2,1)_4^-} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \xi\eta/2 \\ 1/2 & 0 \end{array} \right\}
$$

である．

板厚 t が均一であれば，全既約表現に対する剛性行列は，式(3)より以下のように独立に求められる．

$$
\begin{aligned}
\widetilde{K}_e^{(1,1)_4} &= \frac{4Et}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{2\nu}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{Et}{1-\nu} \\
\widetilde{K}_e^{(1,2)_4} &= 0 \\
\widetilde{K}_e^{(1,3)_4} &= \widetilde{K}_e^{(1,4)_4} = \frac{Et}{1+\nu} \\
\widetilde{K}_e^{(2,1)_4^+} &= \widetilde{K}_e^{(2,1)_4^-} = \frac{Et(3-\nu)}{6(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\widetilde{K}_e^{(1,2)_4}$と$\widetilde{K}_e^{(2,1)_4^{\pm}}$の $(1,1)$成分は剛体変位モードに対応する．

6.　結果と考察

$\mathcal{D}_4$不変軌道に対する要素剛性の定式化の一例は，従来の剛性行列を座標変換したものと一致し，形状関数も本質的に場の対称性に依存する。したがって，対称性を持つ軌道単位で各既約表現空間を張る剛性方程式が組み立てられることになり，セル構造などの多孔質材料の要素解析が可能となる。

参考文献

1) Ario, I., Ikeda, K. and Murota, K. : Block-diagonalization method for symmetric structures with rotational displacements, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE*, No.483/I-27, pp.27-36, 1994.

2) Ario, I., Ikeda, K. and Torii, K. : Block-diagonalization method for dynamic problems of damped symmetric structures, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE*, 1995.