土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I-A 146　厚板理論における固定の境界条件の精確性について（その２）

北見工業大学大学院　学生員　伊藤利彦
北見工業大学　正員　奥村　勇

１．まえがき　現在では、級数解を用いた３次元弾性問題及び厚板の曲げの問題の解析は、実数値の最大値が大幅に大きくなった、最近の電子計算機の進歩により、厳密な３次元弾性論を用いてできる様になった。計算が困難であったとされる、中程度の厚さの平板の解析も同様である。このため、解析方法が厳密でない厚板理論の有用性を見直す必要も生じ始めた。しかし、そうは言っても、工学的見地から言えば、厚板理論が持つ解析方法及び数値計算の簡易性は、依然として魅力あるものと考える。厚板理論の精確性は、たとえ、弾性論的な近似或いは仮定をそこに含まなくても、厚板としての境界条件が、３次元的な力学的条件或いは幾何学的条件にいかに精密に適合するかに大きく依存する様である。

これまでに、著者らが用いて来た厚板理論は、弾性論的に厳密な１０次理論であり、自由及び単純支持の境界条件に対する精度は、高いものを保持している。ところが、固定の境界条件に対する精度について言えば、３次元弾性論による厳密解析と比較した所、必ずしも、高い精確性を持つとは言えない事が最近明らかになった。

本研究は、厚板理論における固定の境界条件の規定方法に考察を加え、周辺固定長方形厚板の厚板理論による解析結果と３次元弾性論による解析結果とを比較して、その精確性を検討するものである。

２．固定の境界条件　直交座標（x, y, z）を用いて、変位成分をu, v 及びwで表すと、固定の境界条件は、次の様に表される。

３次元弾性論（完全固定）:

$x=c$ 或いは $y=c$ において、$u=0$, $v=0$, $w=0$　（1a-c）

厚板理論（近似固定）:

Case 1. $x=c$において、

$(u)_{z=0}=0$, $(v)_{z=0}=0$, $(w)_{z=0}=0$, $(\partial w/\partial x)_{z=0}=0$, $(\partial v/\partial z)_{z=0}=0$　（2a-e）

$y=c$ において、$(u)_{z=0}=0$, $(v)_{z=0}=0$, $(w)_{z=0}=0$, $(\partial w/\partial y)_{z=0}=0$, $(\partial u/\partial z)_{z=0}=0$　（3a-e）

Case 2. $x=c$ 或いは $y=c$ において、

$(u)_{z=0}=0$, $(v)_{z=0}=0$, $(w)_{z=0}=0$, $(\partial u/\partial z)_{z=0}=0$, $(\partial v/\partial z)_{z=0}=0$　（4a-e）

Case 1 の条件は、式（2d）及び式（3d）に見る様に、薄板理論のたわみ角の条件と同じである。厚板理論においては、３つの変位成分は、x, y 及びzの３変数の関数になるので、Case 1 の条件も一つの固定の条件として考えられる。Case 2 の条件は、厚板の中央面においてのみ、条件が課せられている。

３．解析例　図－１に示す部分等分布荷重を受ける周辺固定長方形厚板の解析結果を以下に示す。厚板の辺長比 $b/a=1.0$, 載荷幅比 $c/a=d/b=0.3$ 及びポアソン比 $\nu=0.3$を用い、板厚比 $h/a=1/4, 1/10$を用いる。厚板理論による固定の条件は、Case 1 及び Case 2の両方を用い、３次元弾性論による固定の条件は、完全固定を用いる。３次元弾性論による解析は、板厚が減少するにつれて、級数の収束が遅くなるので、$h/a=1/10$の場合には、多少の誤差が含まれていると考えて良い。表１から表４は、それぞれ、厚板理論によるw, M_x, M_x, Q_xの値に対する３次元弾性論による値の比を示す。以下、３次元弾性論による値を基準にして、厚板理論による値を Case 別に考察する。表１から、Case 1 の場合のwの値は、過小に、Case 2 の場合のwの値は、過大に値が出ている事が分かる。表２から、厚板の中心部では、Case 1 の場合の M_x の値は、過小に、Case 2 の場合の M_x の値は、過大に値が出ている事が分かる。表３からは逆に、固定辺では、Case 1の場合の M_x の値は、過大に、Case 2 の場合の M_x の値は、過小に値が出ている事が分かる。表４から、Case 1 の場合の Q_x の値は、過大に、Case 2の場合のQ_xの値は、過小に値が出ている事

が分かる。図－2,3は、$h/a=1/4$ の場合の σ_{xx} の比較を示す。厚板の中心においては、極めて良く合致するが、固定辺では相異が大きく、その、上、下端においては、全く異なった値を示す事が分かる。また、厚板の中心及び固定辺のいずれにおいても、Case 1の場合の値の方が、相異が大きい事が言えるが、固定辺の上、下端についてのみ言えば、相異の度合いが大きいとはいえ、Case 1の場合の値の方が、相異は小さいという事も言える。これらの表から、Case 1の場合とCase 2の場合とで、たわみ、曲げモーメント及びせん断力の値の全てにおいて、過大、過小が逆に出る事が分かった。更に、たわみ、曲げモーメント及びせん断力の全てにおいて、Case 2の場合の方が、より精確な値が出る事も分かった。

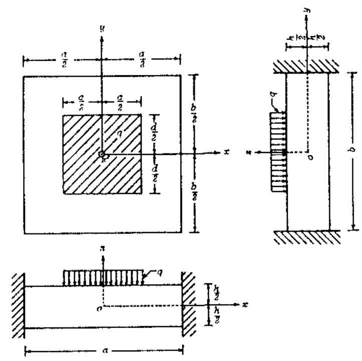

Fig.1 Thick plate with all edges clamped.

表 1 $x=y=z=0$ における w の比較
$(b/a=1.0, c/a=d/b=0.3, \nu=0.30)$

Theory	$w/\frac{qa}{E}$			
	$h/a=1/4$		$h/a=1/10$	
	value	ratio	value	ratio
Case1	-0.452	0.822	-4.873	0.946
Case2	-0.580	1.055	-5.249	1.019
Exact solution	-0.550	1.000	-5.149	1.000

表 2 $x=y=0$ における M_x の比較
$(b/a=1.0, c/a=d/b=0.3, \nu=0.30)$

Theory	$M_x/(qa^2)$			
	$h/a=1/4$		$h/a=1/10$	
	value	ratio	value	ratio
Case1	-0.0106	0.883	-0.0107	0.973
Case2	-0.0123	1.025	-0.0111	1.009
Exact solution	-0.0120	1.000	-0.0110	1.000

表 3 $x=0.5a$ 及び $y=0$ における M_x の比較
$(b/a=1.0, c/a=d/b=0.3, \nu=0.30)$

Theory	$M_x/(qa^2)$			
	$h/a=1/4$		$h/a=1/10$	
	value	ratio	value	ratio
Case1	0.0136	1.581	0.0111	1.112
Case2	0.00760	0.884	0.00969	0.971
Exact solution	0.00860	1.000	0.00998	1.000

表 4 $x=0.5a$ 及び $y=0$ における Q_x の比較
$(b/a=1.0, c/a=d/b=0.3, \nu=0.30)$

Theory	$Q_x/(qa)$			
	$h/a=1/4$		$h/a=1/10$	
	value	ratio	value	ratio
Case1	0.0582	1.296	0.0630	1.230
Case2	0.0447	0.996	0.0568	1.109
Exact solution	0.0449	1.000	0.0512	1.000

<u>４．あとがき</u>　厚板理論における固定の条件は、いかなる理論であっても、近似固定の条件しか課し得ないので、たとえ、固定辺における断面力がある程度の精確さで求められても、応力値そのものは、完全固定とは大きな相異を示す。従って、厚板理論を用いる限り、固定辺のごく近傍における変位及び応力の値が、いかに精確に求められるかが重要であり、それが、厚板理論の精確性を左右すると言える。また、厚板としての境界条件の規定方法によって、その精確性は大きく左右され、極端に言えば、その規定方法次第で、その精確性は、著しく低下すると言えるかもしれない。

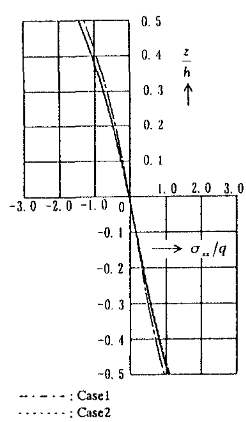

Fig.2 Comparison of σ_{xx} at $x=y=0$. (b/a=1.0 , h/a=1/4)

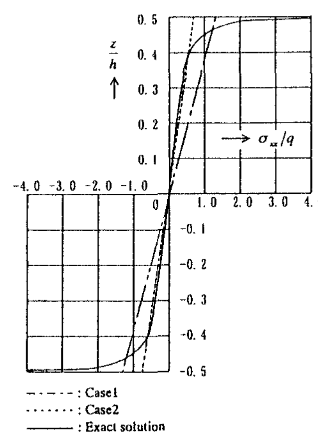

Fig.3 Comparison of σ_{xx} at $x=0.5a$ and $y=0$. (b/a=1.0 , h/a=1/4)