土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I-A 145　直交曲線座標におけるひずみ・応力テンソルについて

北見工業大学　正員　奥村　勇

1．まえがき　或るきっかけで、直交曲線座標におけるひずみテンソルおよび応力テンソルがいかに表示されているかを知りたく思い、数冊の弾性学の書物を紐解いてみた。直交曲線座標における変位場は、Navierの式に見られる様に、座標系ごとに変位ベクトルが定義され、統一的に表示されている。他方、応力場は、直交座標からの座標変換で考えるらしく、座標系ごとのひずみテンソルおよび応力テンソルの定義は、見当らなかった。然しながら、ひずみ成分および応力成分は、座標系ごとに定義され、しかも、Hookeの法則が、直交曲線座標に属する座標系において全て同一になることに着目すると、一般的な座標系として、直交曲線座標におけるひずみテンソルおよび応力テンソルが定義されても良いはずである。

本研究は、直交曲線座標におけるひずみテンソルおよび応力テンソルを提案し、それらを用いて、直交曲線座標における応力のつり合い式およびHookeの法則を表示するものである。それらは、座標系を限定した時に、個々の座標系における応力のつり合い式およびHookeの法則に一致する。

2．ひずみテンソルおよび応力テンソル　直交曲線座標(α,β,γ)における単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\alpha$ ，$\boldsymbol{e}_\beta$ および $\boldsymbol{e}_\gamma$ および直交座標(x,y,z)における単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$ ，$\boldsymbol{j}$ および $\boldsymbol{k}$ で表す。両座標の間には、次の関係があるとする。

$$x=f_1(\alpha,\beta,\gamma),\quad y=f_2(\alpha,\beta,\gamma),\quad z=f_3(\alpha,\beta,\gamma) \tag{1a-c}$$

$$\alpha=\varphi_1(x,y,z),\quad \beta=\varphi_2(x,y,z),\quad \gamma=\varphi_3(x,y,z) \tag{2a-c}$$

直交曲線座標における第１基本量を g_1 ，g_2 および g_3 で表すと、それらは、次式で表される。

$$g_1=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad g_2=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3a,b}$$

$$g_3=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\gamma}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\gamma}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\gamma}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3c}$$

ひずみテンソルをEで表し、次の様に定義する。

$$E=\begin{pmatrix}\varepsilon_{\alpha\alpha} & \varepsilon_{\alpha\beta} & \varepsilon_{\alpha\gamma}\\ \varepsilon_{\beta\alpha} & \varepsilon_{\beta\beta} & \varepsilon_{\beta\gamma}\\ \varepsilon_{\gamma\alpha} & \varepsilon_{\gamma\beta} & \varepsilon_{\gamma\gamma}\end{pmatrix},\quad \varepsilon_{\gamma\beta}=\varepsilon_{\beta\gamma},\ \varepsilon_{\alpha\gamma}=\varepsilon_{\gamma\alpha},\ \varepsilon_{\beta\alpha}=\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{4}$$

ここで、$\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ，$\varepsilon_{\beta\beta}$ および $\varepsilon_{\gamma\gamma}$ は、垂直ひずみを表し、$\varepsilon_{\beta\gamma}$ ，$\varepsilon_{\gamma\alpha}$ および $\varepsilon_{\alpha\beta}$ は、せん断ひずみを表す。

応力テンソルをTで表し、次の様に定義する。

$$T=\begin{pmatrix}\sigma_{\alpha\alpha} & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\gamma}\\ \sigma_{\beta\alpha} & \sigma_{\beta\beta} & \sigma_{\beta\gamma}\\ \sigma_{\gamma\alpha} & \sigma_{\gamma\beta} & \sigma_{\gamma\gamma}\end{pmatrix},\quad \sigma_{\gamma\beta}=\sigma_{\beta\gamma},\ \sigma_{\alpha\gamma}=\sigma_{\gamma\alpha},\ \sigma_{\beta\alpha}=\sigma_{\alpha\beta} \tag{5}$$

ここで、$\sigma_{\alpha\alpha}$ ，$\sigma_{\beta\beta}$ および $\sigma_{\gamma\gamma}$ は、垂直応力を表し、$\sigma_{\beta\gamma}$ ，$\sigma_{\gamma\alpha}$ および $\sigma_{\alpha\beta}$ は、せん断応力を表す。

3．応力のつり合い式およびHookeの法則　直交曲線座標における応力のつり合い式は、次の様なものである。

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_{\alpha\alpha}g_2g_3)+\frac{\partial}{\partial\beta}(\sigma_{\beta\alpha}g_1g_3)+\frac{\partial}{\partial\gamma}(\sigma_{\gamma\alpha}g_1g_2)+\sigma_{\alpha\beta}g_3\frac{\partial g_1}{\partial\beta}+\sigma_{\alpha\gamma}g_2\frac{\partial g_1}{\partial\gamma}-\sigma_{\beta\beta}g_3\frac{\partial g_2}{\partial\alpha}$$
$$-\sigma_{\gamma\gamma}g_2\frac{\partial g_3}{\partial\alpha}+g_1g_2g_3b_\alpha=0 \tag{6a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_{\alpha\beta}g_2g_3)+\frac{\partial}{\partial\beta}(\sigma_{\beta\beta}g_1g_3)+\frac{\partial}{\partial\gamma}(\sigma_{\gamma\beta}g_1g_2)+\sigma_{\beta\gamma}g_1\frac{\partial g_2}{\partial\gamma}+\sigma_{\beta\alpha}g_3\frac{\partial g_2}{\partial\alpha}-\sigma_{\gamma\gamma}g_1\frac{\partial g_3}{\partial\beta}$$

$$-\sigma_{\alpha\alpha} g_3 \frac{\partial g_1}{\partial \beta} + g_1 g_2 g_3 b_\beta = 0 \qquad (6\mathrm{b})$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\sigma_{\alpha\gamma} g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial \beta}(\sigma_{\beta\gamma} g_1 g_3) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(\sigma_{\gamma\gamma} g_1 g_2) + \sigma_{\gamma\alpha} g_2 \frac{\partial g_3}{\partial \alpha} + \sigma_{\gamma\beta} g_1 \frac{\partial g_3}{\partial \beta} - \sigma_{\alpha\alpha} g_2 \frac{\partial g_1}{\partial \gamma}$$

$$-\sigma_{\beta\beta} g_1 \frac{\partial g_2}{\partial \gamma} + g_1 g_2 g_3 b_\gamma = 0 \qquad (6\mathrm{c})$$

ここで、 b_α ， b_β および b_γ は、物体力を表す。

式（５）の応力テンソルを用いると、式（6a-c）のつり合い式は、次の様に表される。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{T} + \frac{1}{g_1}(\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{T}) \cdot (\mathrm{grad}\, g_1\, \boldsymbol{e}_\alpha - \boldsymbol{e}_\alpha\, \mathrm{grad}\, g_1) + \frac{1}{g_2}(\boldsymbol{n}_\beta \cdot \boldsymbol{T}) \cdot (\mathrm{grad}\, g_2\, \boldsymbol{e}_\beta - \boldsymbol{e}_\beta\, \mathrm{grad}\, g_2)$$

$$+ \frac{1}{g_3}(\boldsymbol{n}_\gamma \cdot \boldsymbol{T}) \cdot (\mathrm{grad}\, g_3\, \boldsymbol{e}_\gamma - \boldsymbol{e}_\gamma\, \mathrm{grad}\, g_3) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \qquad (7)$$

ここで、

$$\boldsymbol{b} = b_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + b_\beta \boldsymbol{e}_\beta + b_\gamma \boldsymbol{e}_\gamma \qquad (8\mathrm{a})$$

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{1}{g_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\boldsymbol{e}_\alpha + \frac{1}{g_2}\frac{\partial f}{\partial \beta}\boldsymbol{e}_\beta + \frac{1}{g_3}\frac{\partial f}{\partial \gamma}\boldsymbol{e}_\gamma \qquad (8\mathrm{b})$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(g_2 g_3 A_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta}(g_3 g_1 A_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(g_1 g_2 A_\gamma)\right] \qquad (8\mathrm{c})$$

また、 $\boldsymbol{n}_\alpha$ ， $\boldsymbol{n}_\beta$ および $\boldsymbol{n}_\gamma$ は、単位法線ベクトルを表す。

式（７）を直交座標に限定すると、α，β および γ は、それぞれ、x，y および z に置き換えられ、式（3a-c）から、$g_1=g_2=g_3=1$ となるので、式（７）は、次式となる。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \qquad (9)$$

ここで、

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k} \qquad (10\mathrm{a,b})$$

式（９）は、応力テンソルで表された時の直交座標におけるつり合い式である。

式（４）のひずみテンソルおよび式（５）の応力テンソルを用いると、Hooke の法則は、次式の様に表される。

$$\boldsymbol{T} = 2G\left(\boldsymbol{E} + \frac{\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{I}\, e\right) \qquad (11)$$

ここで、G および ν は、それぞれ、せん断弾性係数およびポアソン比を表し、また、 $e = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta} + \varepsilon_{\gamma\gamma}$ は、体積膨張率、$\boldsymbol{I}$ は、単位テンソルを表す。

式（11）は、ひずみテンソルおよび応力テンソルの成分で表すこともでき、次式となる。

$$\sigma_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij} e\right), \quad (i, j = \alpha, \beta, \gamma) \qquad (12)$$

ここで、 δ_{ij} は、クロネッカーのデルタを表す。

４．あとがき　本研究で提案したひずみテンソルおよび応力テンソルは、直交曲線座標における変位場の様に、応力場を統一的に表現できないかという着想に基づいた一試案である。ひずみテンソルおよび応力テンソルが、２階の混合テンソルとして、変換則を満足していることは確認してある。式（７）のつり合い式には、括弧で繰った３つのdyadの項が現れるが、それらは、それぞれ、交代テンソルになる。より詳しいことについては、講演会当日に報告する。