

I-A 144

面外荷重下での層状楕円リングを有する弾性体の解析

山梨大学大学院

山梨大学工学部

山梨県建設技術センター

学生員 ○池田 然之

正会員 平島 健一

佐野 靖

1. まえがき

本研究では二次元等方性弾性体内に、完全接合あるいはある種のすべりが生じる場合を想定した共焦点の楕円形境界が存在し、この楕円形境界により形成された層状楕円リングに、無限遠からの面外せん断荷重が作用する問題を対象とする。解析方法としては写像関数を用い、楕円境界上において解析接続を行うことにより解析解を導く。

2. 応力・変位を求める公式

図1(a)に示すように、奥行き方向に十分長く断面形状の変化のない楕円形境界を想定し、媒体と介在物1との間の楕円形境界を L_1 、介在物1と介在物2との間の楕円形境界を L_2 、介在物2と介在物3との間の楕円形境界を L_3 、楕円の共焦点間の境界を L_0 とする。また、媒体、介在物1、および介在物2の弾性係数およびポアソン比はそれぞれ E_1, ν_1, E_2, ν_2 および E_3, ν_3 とする。ここで図1に示す複素平面を

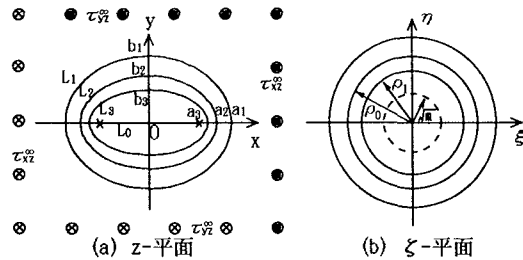


図1 物理平面と写像平面

$z = x + iy$ とし、この z -平面を ζ -平面上の円形リングに写像する関数を $\omega(\zeta)$ とすれば、次式が成立する。

$$z = \omega(\zeta) = R_0(\zeta + m/\zeta) \quad \text{ここに} \quad R_0 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} \quad (1)$$

この写像関数を用いることにより図1(b)に示すように境界 L_1 は ζ -平面上では単位円に、また境界 L_2, L_3 は半径 ρ_0, ρ_1 の円に写像される。上記の楕円形境界 $L_k (k=1, 2, 3)$ に沿う曲線座標系 (ξ, η) の任意点における面外方向の変位、応力、および合応力は複素関数 $F_k(z)$ を用いて次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} u_z^k &= \frac{1}{2G_k} \{F_k(z) + \overline{F_k(z)}\}, \quad P_z^k = \frac{1}{2i} \{F_k(z) - \overline{F_k(z)}\}, \\ \tau_{\xi z}^k - i\tau_{\eta z}^k &= (\tau_{xz}^k - i\tau_{yz}^k)e^{i\varphi} = F_k'(z)e^{i\varphi}, \quad e^{i\varphi} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega(\zeta)|} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3. 境界条件と定式化

(1) 二領域の場合

境界条件として境界 L_1 上での合応力、変位の連続あるいはすべりに関する条件、共焦点間 L_0 上での関数の連続性に関する条件の二つが次式のように定められる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 P_z^1 &= P_z^2, \quad \beta_1 u_z^1 = u_z^2; \text{境界 } L_1 \\ r F_3(\zeta) &= {}_0 F_3(m/\zeta); \text{境界 } L_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 α_1, β_1 は合応力、変位に関連した境界 L_1 上でのある程度のすべりを許容するすべり係数である。この境界条件を満足するように、解析接続を行うことにより各領域の解析関数が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta) &= R_0 \{ (B_{11}^2 \zeta + B_{21}^2 / \zeta) A + (B_{31}^2 \zeta + B_{41}^2 / \zeta) \bar{A} \} \\ F_2(\zeta) &= \frac{\alpha_1 R_0}{1 - K_1} \{ (B_{12}^2 \zeta + B_{22}^2 / \zeta) A + (B_{32}^2 \zeta + B_{42}^2 / \zeta) \bar{A} \} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに B_{ij}^k はこの後の三領域、四領域も同様にすべり係数、せん断弾性係数、楕円形状によって定まる実定数であり、 K_1 はすべり係数とせん断弾性係数で定まる実定数である。この解析関数をもとに数値計算を行った結果が図2である。図

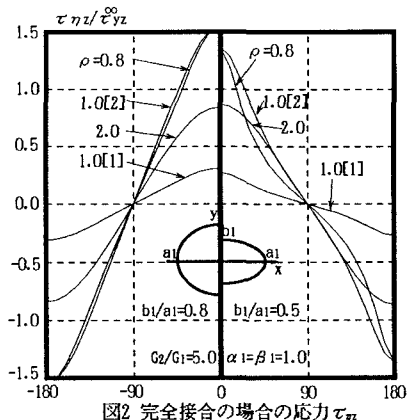


図2 完全接合の場合の応力 τ_{xz}

2は無限遠からの面外せん断応力 τ_{yz}^∞ が作用した、完全接合の場合の応力 $\tau_{\eta z}$ の分布図である。着目点を $\rho = 0.8, \rho = 1.0$ (境界 L_1 上), $\rho = 2.0$ とし、右側半分と左側半分とで、楕円形状を変化させている。

(2) 三領域（一層の楕円形リング）の場合

この場合の境界条件として境界 L_1 上での合応力、変位の連続あるいはすべりに関する条件、境界 L_2 上での合応力、変位の連続あるいはすべりに関する条件、またリングの内側の共焦点点 L_0 上における関数の連続条件の三つが次式のように定められる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 P_z^1 &= P_z^2, & \beta_1 u_z^1 &= u_z^2 & ; \text{境界 } L_1 \\ \alpha_2 P_z^2 &= P_z^3, & \beta_2 u_z^2 &= u_z^3 & ; \text{境界 } L_2 \\ r F_3(\zeta) &= {}_0 F_3(m/\zeta) & ; \text{境界 } L_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は、二領域の場合と同様すべり係数であり、上記の境界条件を満足するように解析接続を行うことにより、各領域の解析関数が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta) &= R_0 \{ (B_{11}^3 \zeta + B_{21}^3 / \zeta) A + (B_{31}^3 \zeta + B_{41}^3 / \zeta) \bar{A} \} \\ F_2(\zeta) &= \frac{\alpha_1 R_0}{1 - K_1} \{ (B_{12}^3 \zeta + B_{22}^3 / \zeta) A + (B_{32}^3 \zeta + B_{42}^3 / \zeta) \bar{A} \} \\ F_3(\zeta) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 R_0}{(1 - K_1)(1 - K_2)} \{ (B_{13}^3 \zeta + B_{23}^3 / \zeta) A + (B_{33}^3 \zeta + B_{43}^3 / \zeta) \bar{A} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

この解析関数をもとに数値計算を行った結果が図3である。図2と同様面外せん断応力 τ_{yz}^∞ が作用した完全接合の場合の $\tau_{\eta z}$ の分布図である。着目点を $\rho = 0.69$ (境界 L_2 上), $\rho = 1.0$ (境界 L_1 上), $\rho = 2.0$ としている。

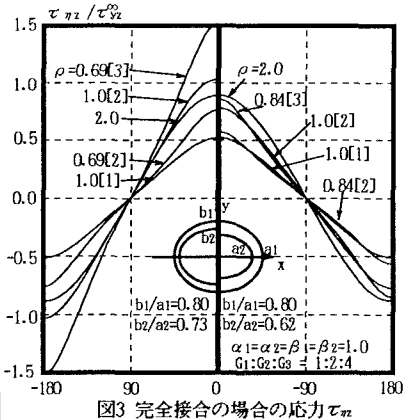


図3 完全接合の場合の応力 $\tau_{\eta z}$

(3) 四領域（二層の楕円形リング）の場合

四領域の場合は三領域と異なり、楕円形リングの内側の領域は空孔または剛体介在物と仮定する。よって、境界条件は L_1, L_2 上では前述と同様、 L_3 上では空孔または剛体で異なり次式によって表される。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 P_z^1 &= P_z^2, & \beta_1 u_z^1 &= u_z^2 & ; \text{境界 } L_1 \\ \alpha_2 P_z^2 &= P_z^3, & \beta_2 u_z^2 &= u_z^3 & ; \text{境界 } L_2 \\ P_z^3 &= 0 : \text{自由境界} \\ u_z^3 &= 0 : \text{固定境界} \end{aligned} \right\} ; \text{境界 } L_3 \dots\dots\dots (7)$$

上記の境界条件を満足するように、解析接続を行うことにより、各領域の解析関数が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta) &= R_0 (B_{11}^4 \zeta A + B_{12}^4 / \zeta \bar{A}) \\ F_2(\zeta) &= R_0 (B_{21}^4 \zeta A + B_{22}^4 / \zeta \bar{A}) \\ F_3(\zeta) &= R_0 (B_{31}^4 \zeta A + B_{32}^4 / \zeta \bar{A}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

これら解析関数を用いて数値計算を行った結果が図4である。図4は弾性体の降伏や破壊において重要となる最大せん断応力 τ_{max} の等値線の分布図である。楕円リング内で剛体介在物の影響が顕著に表れている。

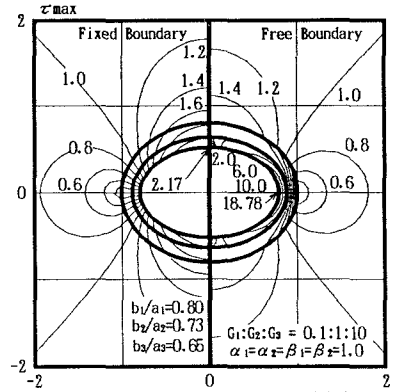


図4 完全接合の場合の最大せん断応力 τ_{max}

4. むすび

本研究は、面外せん断荷重下での層状楕円形リングを有する二次元弾性体の問題を対象として複素応力関数を用いた解析解の導出を行ったものである。また、得られた解析解を用いて数値計算を行い、想定した解析モデルに対する応力ならびに変位を具体的に求めた。

参考文献

- 1) 森口繁一, 2次元弾性論, 岩波書店, pp.1-77, 1956.
- 2) 木村・山下・平島・木口, 補強リングを有するだ円孔問題の解析解とその数値計算例(第1報), 機学会論文集, 61-589, A(1995).
- 3) 川久保・平島, だ円形空孔または介在物を有する異方性弾性体の面外荷重問題に対する解析解と数値計算例, 機学会論文集, 61-584, A(1995), pp.760-768.
- 4) Wu, C.H. and Chen, C.H.: A Crack in a Confocal Elliptic Inhomogeneity Embedded in an Infinite Medium, *J. Applied. Meck.*, Vol.57, pp.91-96, 1990.