土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I-A 129

一次元半無限問題の近似解法

北海道大学　学生員　岡原貴司
北海道大学　正会員　三上　隆
札幌市　畠　雄吾
釧路工業高等専門学校　正会員　芳村　仁

１．はじめに

半無限問題は、多くの現実の問題に現れる。無限領域の問題の解法は大別して２つの方法が考えられる。第１の方法は外部境界を遠くであるが有限の距離のところに固定し、その境界までの領域だけを離散化するものである。この方法は、多数の離散点が必要であり、また十分遠い所としてどの程度の距離の所を選べばよいかという問題が生じるが、実際的な解法としてよく用いられる。第２の方法は、直接的に無限遠に広がる領域を扱うものである。ここでは、後者の方法を取りあげ、無限領域を有限領域に写像する方法の適用可能性の基本的な検討を行った。

２．解析方法

半無限問題の例として，次の微分方程式と境界条件で記述される問題を取り上げる。

$$\frac{d^2w}{dx^2}=A^2w \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x=0 \text{ で } w=w_0 \ , \quad x=\infty \text{ で } w=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ここで$A=$定数である。問題の厳密解は$w=w_0\exp(-Ax)$。

無限領域$(0\le x<\infty)$を有限領域$(0\le\xi<1)$に写像する方法に指数写像(exponential map)と代数写像(algebraic map)を用いる[1)]。

指数写像；$\xi=1-e^{-x/L}$　　　$\cdots\cdots\cdots(3\cdot a)$

代数写像；$\xi=x/(L+x)$　　　$\cdots\cdots\cdots(3\cdot b)$

ここで，Ｌは$\xi=1$への収束の度合いを表す尺度であり，その様子を図－１に示す。この図より，Ｌの値が小さい程$\xi=1$への収束は早く，またＬ＝一定では，指数写像が代数写像よりも$\xi=1$への収束が早いことがわかる。

式(3)を用いて独立変数xをξに変換すれば，式(1)と式(2)は以下となる。

指数写像；

$$(1-\xi)^2\frac{d^2w}{d\xi^2}-(1-\xi)\frac{dw}{d\xi}-A^2L^2w=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(4\cdot a)$$

$$\xi=0 \text{ で } w=w_0 \ , \quad \xi=1 \text{ で } w=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(4\cdot b)$$

線形写像

$$(1-\xi)^4\frac{d^2w}{d\xi^2}-2(1-\xi)^3\frac{dw}{d\xi}-A^2L^2w=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(5\cdot a)$$

$$\xi=0 \text{ で } w=w_0 \ , \quad \xi=1 \text{ で } w=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(5\cdot b)$$

なお，式(4),(5)の解法には，Legendre多項式の零点を選点する選点法[2)]によった。

３．数値計算例

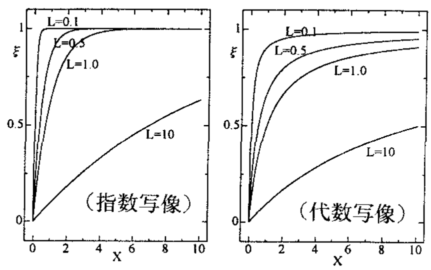
$w_0=1$，選点数ＮにN=11を用いて，A=0.1およびA=1.0に対して，それぞれL=１,５,10,100およびL=0.1,0.5,１,10と変化させて計算を行った。図－２は指数写像による,図－３は代数写像による結果である（実線は厳密解）。これによれば，代数写像の場合(式(5))の結果は，ＡとＬの値によらず厳密解によく一致するが，指数写像の場合(式(4))には，ＡとＬの積が$AL<<1$のとき厳密解に一致していないことが分かる。なお，これは，厳密解$w=w_0\exp(-Ax)$を式(3・a)を用いてξに変換すれば，$w=w_0(1-\xi)^{AL}$と表されるが，そのξに関する一次導関数$\partial w/\partial\xi$の$\xi\to1$における極限値が$AL<1$で$\partial w/\partial\xi\to\infty$になることに対応している。

図－4と図－5は，A＝1, L＝1のときの選点数Nの解に与える影響をみたものである。これによれば，Nによらず安定した解が得られている。

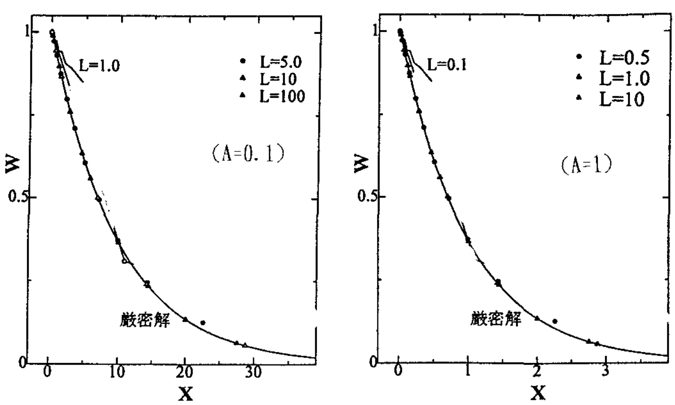
なお，他の数値例は当日発表の予定。

参考文献

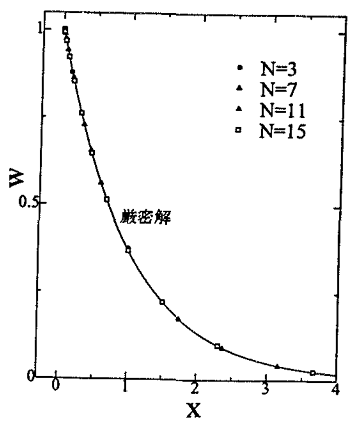
1)C.Canuto.,et al.:Spectral Methods in Fluid Dynamics , Springer - Verlag , 1986.
2)T.Mikami and J.Yoshimura; Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.7 , No.2 , 1990.



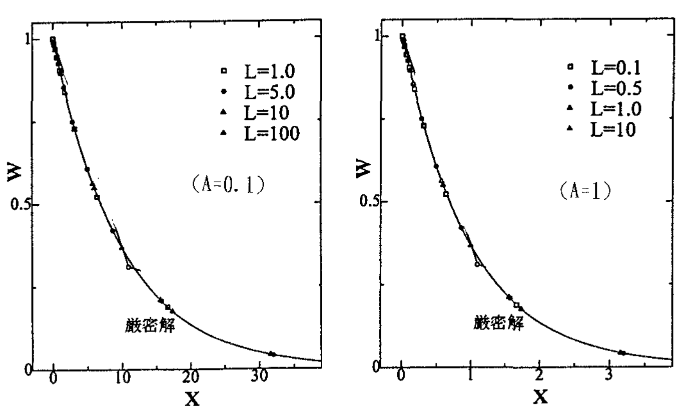
図－1　ξとLの関係



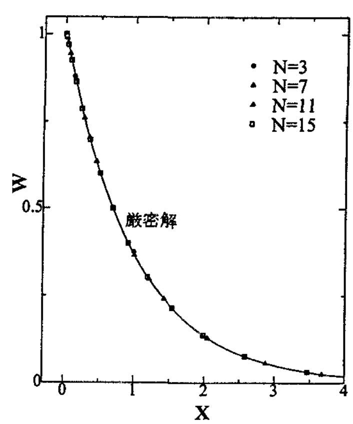
図－2　指数写像による解



図－4　選点数の解に与える影響(指数写像)



図－3　代数写像による解



図－5　選点数の解に与える影響(代数写像)