土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I－A 128

有限要素法による赤潮をモデルにした非線形反応-拡散システムの安定解析

中央大学理工学部　正員　Yan DING
中央大学理工学部　学員　藤野 剛
中央大学理工学部　正員　川原 睦人

1　はじめに

安定問題とは不安定な現象に対してそのシステムがどのような状態の時に不安定になってしまうのかを考えている。不安定な現象とは現象自体のメカニズムがよくわからないものや、現象を普通に計算できないものである。ここで扱う不安定性は数値的に不安定な計算とは異なる。例えば構造物の座屈問題、生物間の被食・補食の関係（局所的に生態形のバランスが崩れたりする場合）、物質の乱流拡散現象など様々なものがあげられる。本研究では、この様なものに対して解の方向性をある程度知ること（予測とまではいかないまでも）を考える。特に外力項を含むシステムに対して、その外力に対して安定から不安定に遷移する臨界状態を求めることを目的としている。ここで扱うシステムとして進化方程式を考える。この方程式は分岐パラメータを含んでいて、このパラメータは解の安定性を左右する。そしてこのパラメータと解の関係を調べること行っている。一般に拡散-反応システムにおいては、空間的に同時摂動に対して安定であるが、非同時摂動に対しては不安定である一様状態をもつ（同時摂動に対してより非同時摂動に対しての方が少なくてもより不安定である）。我々は *Tubularia* におけるヒドロ花再生のモデルに対して安定解析を試みている。空間に対する離散化手法として有限要素法を用い、一般化固有値問題のアルゴリズムによってヘルムホルツ方程式のスペクトルを求めている。

本解析の数値解析例として、１９７８年９月に発生した赤潮をモデルに検討を行っている。赤潮発生時には、生物間の被食-補食の関係はすでにくずれていると考えられる。そこでこの現象は、数値的に安定な平衡解を求めることが難しいので、同時摂動に対するスペクトルを求め、非同時摂動に対する平衡解の安定性を検討している。

2　解析モデル

解析モデルには、*Tubularia* のヒドロ花再生のモデルを用いている。(Britton *et al.*, 1983). そのシステムは次のように考えられる。

$$\dot{u} = \lambda f(u,v) + D_1\nabla^2 u, \quad \dot{v} = \lambda g(u,v) + D_2\nabla^2 v \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} f(u,v) &= J_1 - u - \rho h(u,v) \\ g(u,v) &= \alpha(J_2 - v) - \rho h(u,v) \\ h(u,v) &= \frac{uv}{1+u+Ku^2} \end{aligned}$$

ここで $D_1, D_2, J_1, J_2, \alpha, \rho, K$ は定数である。それに対して分岐パラメータ λ は正の変数である。そして ∇^2 と境界条件は次のようになる。

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (2)$$

$$\nabla b\cdot\vec{n} = \nabla c\cdot\vec{n} = 0 \quad on \quad \Omega \qquad (3)$$

3　スペクトル問題

式（１）の解の安定性は線形システムに一致し次のように表すことができる。

$$F\phi = \sigma\phi \qquad (4)$$

ここで F は線形演算子、σ と ϕ は固有値、固有ベクトルである。

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} D_1\nabla^2 + \lambda f_u & \lambda g_u \\ \lambda f_v & D_2\nabla^2 + \lambda g_v \end{bmatrix} = \lambda M + D\nabla^2 \qquad (5)$$

$f_u, f_v, g_u, g_v, h_u, h_v$ はヤコビ行列の成分である。また M と D は次のように定義される。

$$M = \begin{bmatrix} f_u & g_u \\ f_v & g_v \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & \\ & D_2 \end{bmatrix}$$

与えられた境界条件のもとで領域 Ω 上で $-\nabla^2$ の固有値は $i = 0,1,2,...,$ に対して k_i^2 によって与えられるので、スペクトル問題（４）は式（６）によって与えられる解を持つ。

$$\begin{vmatrix} \sigma_i + D_1k_i^2 - \lambda f_u & -\lambda f_v \\ -\lambda g_u & \sigma_i + D_2k_i^2 - \lambda g_v \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

k_i^2 がとれる可能な値を見つけるために、与えられた境界条件のもとに領域 Ω で次の式を解く。

$$\nabla^2 u + k_i^2 u = 0 \qquad (7)$$

もし式（６）の多項式が非自明解を持つのであれば、$F(\lambda)$ の固有値 σ_i は次のような根によって与えられる。

$$\sigma_i^2 + \{(D_1+D_2)k_i^2 - \lambda trM\}\sigma_i + Q_i(\lambda) = 0 \qquad (8)$$

ここで $Q_i(\lambda)$ そして M の転置と行列式は次のようになる。

$$Q_i(\lambda) = D_1D_2k_i^4 - \lambda k_i^2(D_1g_v + D_2f_u) + \lambda^2 detM \qquad (9)$$

$$trM = f_u + g_v, \quad detM = f_u g_v - f_v g_u \qquad (10)$$

式（8）においてすべての固有値 σ_i の実数部が負であるなら、システム（1）は漸近安定である。

4 有限要素法による固有値問題

固有値 σ_i を得るために、式（7）の解を求めなければならない。有限要素法により式（7）を離散化すると次のようになる。

$$S_{\alpha\beta}u_\beta - k_i^2 M_{\alpha\beta}u_\beta = 0 \qquad (11)$$

ここで各形状マトリクスは次のようになる。

$$S_{\alpha\beta} = \int_v \Phi_{\alpha,i}\Phi_{\beta,i}dv, \quad M_{\alpha\beta} = \int_v \Phi_{\alpha i}\Phi_{\beta i}dxdy$$

式（11）は一般化固有値問題として取り扱われる。これにより固有値 k_i^2、と固有ベクトル u を求める。

5 無次元パラメータ

計算の前に（1）のシステムを無次元化している。物理変数のスケールは次のようになる。(i) u_0 は植物プランクトンの最大密度 (ii) T_0 は赤潮における濃淡のある変動の時間であり (iii) L_0 は湾においてごく平均的に見られるパッチの幅である。これらの物理変数は観測結果により検討されたものである。各変数の値は $T_0 = 2.5$ 時間, そして $L_0 = 1,000.0m$ である。また拡散係数は統計と計算により約 $1.75 \times 10^{-3} cm^2/s$ を得る。これに対する無次元化された拡散係数は $D_1^* = 1.26 \times 10^{-3}$ となる。D_2^* は D_1^* の半分の値をとっている。無次元化された式（1）は次のように書き直される。

$$\dot{u^*} = \lambda f(u^*, v^*) + D_1^* \nabla^2 u^*, \quad \dot{v^*} = \lambda g(u^*, v^*) + D_2^* \nabla^2 v^* \qquad (12)$$

ここにアスタリスクは無次元を意味する。

6 数値解析例

本手法を検討するために、1978年に舞鶴湾で起こった実際の赤潮をモデルにした数値解析例を紹介する。舞鶴湾の有限要素分割図を図-1に示す。総節点数が926、総要素数が1,446である。ヘルムホルツ方程式より固有値 k_i^2 と固有ベクトル u を求めた。その固有ベクトルを一様状態として安定性の検討を行った。その安定性を図-2に示す。これは分岐パラメータと固有値 k_i に対応する分岐図を示している。▲の領域は不安定な領域を示している。分岐パラメータが増すにつれて、不安定なモードが増えている。

7 おわりに

本論文では、舞鶴湾で発生した赤潮をモデル化し、有限要素法によってヘルムホルツ方程式のスペクトルを求めた。そしてリアプノフの定義に基づいて非同時摂動に対する安定性の解析を行った。有限要素分割図が非対称であるにもかかわらずヘルムホルツ方程式のスペクトルが振動を表れた。そして不安定なモードは低い方から多く表れている。No.1のモードはすべての分岐パラメータに対して安定であった。このモードはスペクトルが一様状態であるため拡散項に対する影響がないからである。それはこのシステムが物質の反応項だけをもつ場合、解は定常状態に安定に収束するからである。今回の報告では定常な状態に対するモデルの安定性を検討した。しかし実際の赤潮は非定常な現象であり、我々はそれに対して近づくことが必要である。また今回の方程式には移流項が含まれていないので、それを考慮することも今後必要となるであろう。必ずしもこのモデルが正しいとは言えず、いろいろなプランクトンに対するモデルが提案されている。他のモデルに対する検討も重要である。

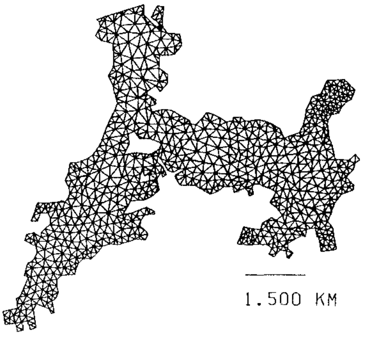

図-1 舞鶴湾の有限要素分割図

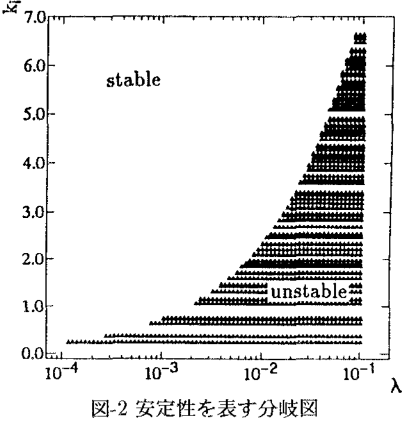

図-2 安定性を表す分岐図

参考文献

1. N.F.Britton, G.Joly, M.-C.Duban, A model for hydranth regeneration in *Tublaria. Bull. Math. Biol.* 45, 311-321
2. N.F.Britton, Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology, *Academic Press* pp.133-138.
3. 坂本　亘, 赤潮生物の物理学的集積, 赤潮 - 発生機構と対策, 日本水産学会編, 恒星社厚生閣刊　(1981).